



เอกสารประกอบการสอน

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2 (ค 31204)

ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2565

เรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวย (ปลายภาค)

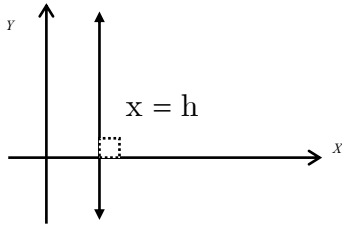
โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา



ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรง

ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงมีดังนี้

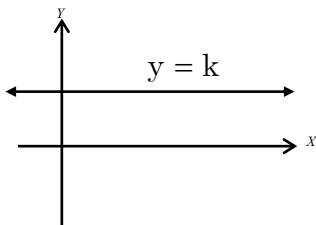
1. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเส้นตรงขนานกับแกน Y



กำหนดให้ L เป็นเส้นตรงที่ขนานแกน Y และผ่านจุด $(h, 0)$

$$\text{ความสัมพันธ์คือ } \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = h\}$$

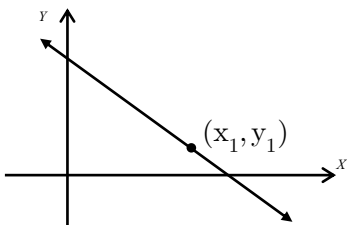
2. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเส้นตรงขนานกับแกน X



กำหนดให้ L เป็นเส้นตรงที่ขนานแกน Y และผ่านจุด $(0, k)$

$$\text{ความสัมพันธ์คือ } \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = k\}$$

3. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่ไม่ขนานแกน X และแกน Y

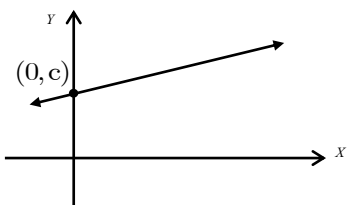


- (1) รูปแบบจุด-ความชัน

กำหนดให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และ

มีความชันเท่ากับ m จะได้ความสัมพันธ์ คือ

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y - y_1 = m(x - x_1)\}$$



- (2) รูปแบบความชัน-ระยะตัดแกน Y

กำหนดให้ L เป็นเส้นตรงที่มีระยะตัดแกน Y เท่ากับ c

และมีความชันเท่ากับ m จะได้ความสัมพันธ์ คือ

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = mx + c\}$$



ทฤษฎีบท เส้นตรงในระนาบแกนมุมฉาก จะมีสมการในรูปทั่วไป $Ax + By + C = 0$
เมื่อ A, B, C เป็นค่าคงที่ โดยที่ $A \neq 0$ หรือ $B \neq 0$

หมายเหตุ จากความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นเส้นตรงในรูปทั่วไป $Ax + By + C = 0$

จัดรูป จะได้ $By = -Ax + C$

$$y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B}$$

จะได้ความชันของเส้นตรง m เท่ากับ $-\frac{A}{B}$ ระยะตัดแกน Y เท่ากับ $\frac{C}{B}$

หรือ เรามักจะเขียนในรูป $y = mx + c$

และเรียกสมการ $y = mx + c$ ว่า รูปแบบมาตรฐานของเส้นตรง

ตัวอย่างที่ 1

- จงหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นเส้นตรงตามสมบัติที่กำหนดให้
 - ขนานแกน X และผ่านจุด $(2, -3)$
 - ขนานแกน Y และอยู่ทางซ้ายของแกน Y เป็นระยะ $\frac{2}{3}$ หน่วย
 - ขนานแกน X และอยู่ห่างแกน X เป็นระยะ 2 หน่วย
 - ผ่านจุด $(1, 3)$ และมีความชัน 2



คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2 เรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวย

(5) เส้นตรงที่ผ่านจุด $(-3, 4)$ และ $(2, -5)$

(6) เส้นตรงที่มีความชัน $\frac{4}{5}$ และระยะตัดแกน X เท่ากับ 5

(7) เส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ $-\frac{2}{5}$ และระยะตัดแกน Y เท่ากับ -5

(8) ความชันของเส้นตรงเท่ากับ 0 ผ่านจุด $(2, -5)$

(9) เส้นตรงที่มีระยะตัดแกน X เท่ากับ 3 และระยะตัดแกน Y เท่ากับ -4



คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2 เรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวย

(10.) จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2, 3)$ และขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $A(4, 1)$ และ $B(-2, 3)$

(11.) จงหาสมการของเส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด $A(7, 2)$ และ $B(-1, -2)$

(12.) จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, -2)$ และขนานกับเส้นตรง $3x + 4y + 2 = 0$

(13.) จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-2, 2)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $3x + 2y - 6 = 0$

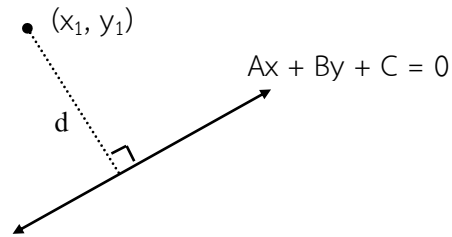


ระยะทางระหว่างเส้นตรงกับจุด

(1) ระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุด

ให้ d เป็นระยะทางระหว่างจุด (x_1, y_1) ถึงเส้นตรง $Ax + By + C = 0$ จะได้ว่า

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



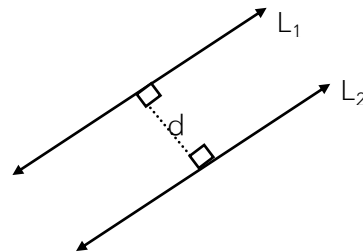
(2) ระยะทางระหว่างเส้นคู่ขนาน

ให้ d เป็นระยะทางระหว่างเส้นคู่ขนาน และ

$$L_1 \text{ มีสมการเป็น } Ax + By + C_1 = 0$$

$$L_2 \text{ มีสมการเป็น } Ax + By + C_2 = 0 \quad \text{จะได้ว่า}$$

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



ตัวอย่างที่ 2

(1.) จงหาระยะระหว่างจุด $(6, 8)$ กับเส้นตรง $3x + 4y - 25 = 0$

(2.) วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุด $C(2, 3)$ และเส้นตรงที่มีสมการ $7x + 24y = 11$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม
จงหาความยาวเส้นรอบวงกลม



คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2 เรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวย

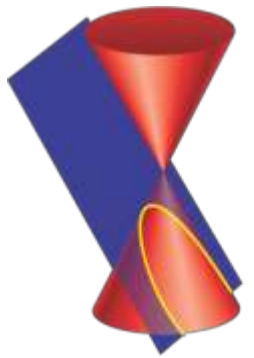
(3.) สามเหลี่ยม ABC มีจุดยอดมุมที่จุด $A(5, 6)$, $B(1, -4)$, และ $C(-4, 0)$
จงหาความสูงที่วัดจากจุด A ไป BC

(4.) จงหาค่า k ซึ่งทำให้ระยะระหว่างเส้นตรง $8x + 15y + k = 0$ กับจุด $(2, 3)$ เท่ากับ 5 หน่วย

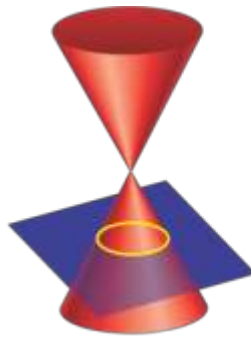
(5.) จงหาจุดบนแกน X ที่อยู่ห่างจากเส้นตรง $3x - 4y - 6 = 0$ เป็นระยะ 2 หน่วย



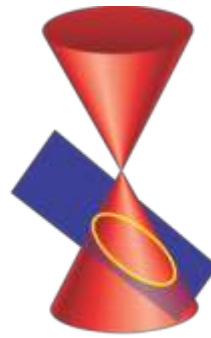
ภาคตัดกรวย



parabola



circle



ellipse



hyperbola

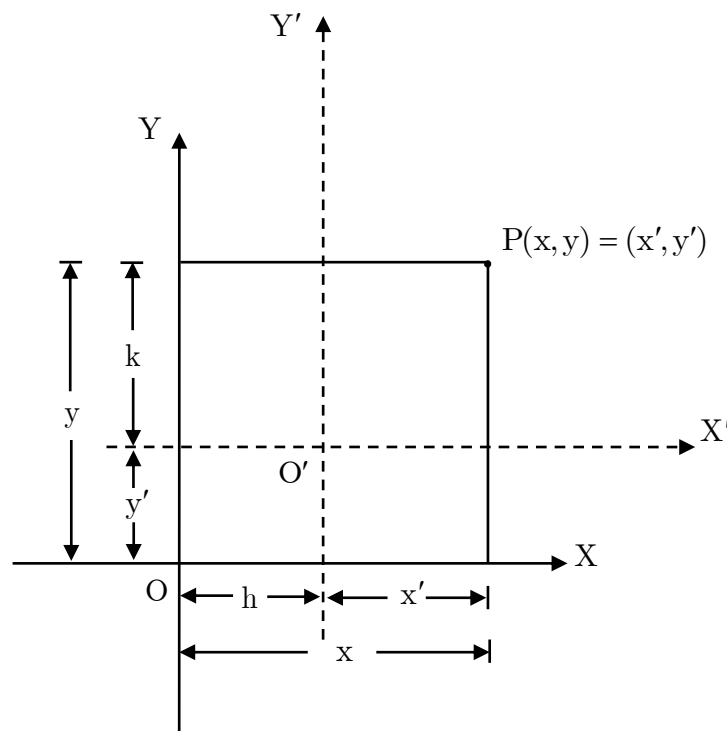


ความรู้พื้นฐานที่ควรทราบ

การเลื่อนทางขนาน (Translation of Axes)

ก่อนจะทำการศึกษาภาคตัดกรวย เราควรศึกษาการเลื่อนแกนทางขนาน จะทำให้เราสามารถหาสมการของวงกลม พาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลาได้ง่ายขึ้น

ในระบบพิกัดฉาก การที่ตั้งแกน X และแกน Y ขึ้นมานั้นเพื่ออ้างอิงพิกัดตำแหน่งของจุดในระนาบ เมื่อเลื่อนแกนจุดในระนาบยังคงที่ แต่ตำแหน่งซึ่งบอกตำแหน่งของจุดเปลี่ยนไป



$$\begin{array}{l} \text{ดังนั้น} \\ x' = x - h \quad \text{หรือ} \quad x = x' + h \\ y' = y - k \quad \text{หรือ} \quad y = y' + k \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาพิกัดของจุดต่อไปนี้ ในระบบแกนพิกัดฉากใหม่ ซึ่งมีจุดกำเนิดอยู่ที่จุด $(-3, 4)$

1. $A(2, 3)$
2. $B(-1, 2)$
3. $C(-2, -4)$
5. $D(4, -1)$



วงกลม (Circle)

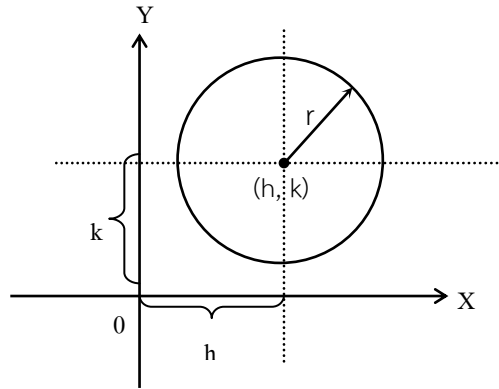
บทนิยาม วงกลม คือ เซตของจุดทุกจุดในระนาบที่ห่างจากจุดคงที่เป็นระยะทางเท่ากัน

จุดคงเรียกว่า จุดศูนย์กลาง
ระยะทางที่เท่ากันเรียกว่า รัศมี

สมการรูปทั่วไป

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

- จุดศูนย์กลางคือ (h, k)
- รัศมี คือ r



สมการมาตรฐาน

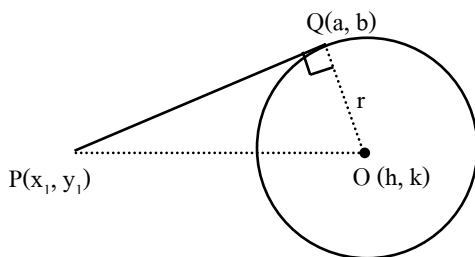
$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

- จุดศูนย์กลางคือ $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$
- รัศมี คือ $\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F}$

หมายเหตุ

1. ถ้า $D^2 + E^2 - 4F > 0$ มีกราฟเป็นวงกลม
2. ถ้า $D^2 + E^2 - 4F = 0$ มีกราฟเป็นจุดเพียงจุดเดียว
3. ถ้า $D^2 + E^2 - 4F < 0$ มีเป็นวงกลมในจินตภาพ

ระยะทางระหว่างจุด P ถึงจุดสัมผัสส่ววงกลม Q คือ



$$|PQ| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F}$$

แทนจุด $P(x_1, y_1)$ แทนในสมการวงกลม
แล้วหารากที่สอง



ตัวอย่างที่ 4 1. จงหาสมการของวงกลมในแต่ละข้อต่อไปนี้

- (1) วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(1, 2)$ และสัมผัสกับแกน Y

- (2) วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(2, 4)$ และสัมผัสกับแกน X

- (3) วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(2, -1)$ และผ่านจุด $(-1, 3)$

- (4) วงกลมที่มีจุด $(-1, 2)$ และ $(5, -4)$ ปลายของเส้นผ่านศูนย์กลาง

- (5) วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(1, -2)$ และมีเส้นตรง $4x - 3y + 3 = 0$ เป็นเส้นสัมผัส



2. จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม และวาดกราฟของวงกลมดังต่อไปนี้

(1) $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$

(2) $2x^2 + 2y^2 + 16x - 8y + 8 = 0$

3. กำหนดวงกลม C_1 ที่มีสมการ $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 10 = 0$

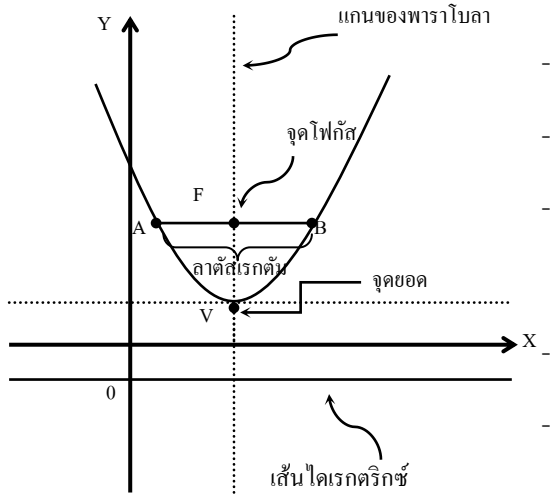
จงหาสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลม C_1 และผ่านจุด $(-1, 3)$



พาราโบลา (Parabola)

บทนิยาม พาราโบลา คือ เซตของจุดทุกจุดในระนาบ ซึ่งอยู่ห่างจากเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่ง และจุดคงที่จุดหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากันเสมอ

ส่วนประกอบต่าง ๆ ของพาราโบลา



- เส้นตรงคงที่ เรียกว่า **เส้นไดเรกทริกซ์**
- จุดคงที่ เรียกว่า **จุดโฟกัส** ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย F
- เส้นตรงที่ลากผ่านจุดโฟกัสและตั้งฉากกับเส้นไดเรกทริกซ์ เรียกว่า **แกนของพาราโบลา**
- จุดที่กราฟตัดกับแกนของพาราโบลา เรียกว่า **จุดยอด**
- เส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนของพาราโบลาและผ่านจุดโฟกัส เรียกว่า **ลาตัสเรกตัม** ซึ่ง ความยาวลาตัสเรกตัมเท่ากับ $|4c|$

รูปแบบของพาราโบลา

สมการ $Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$

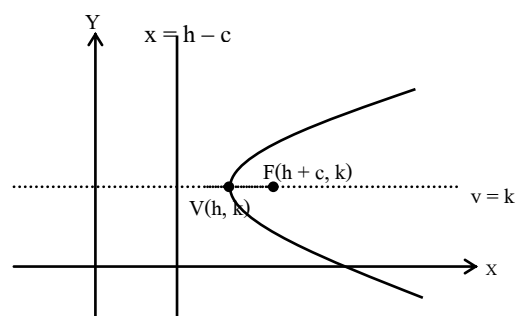
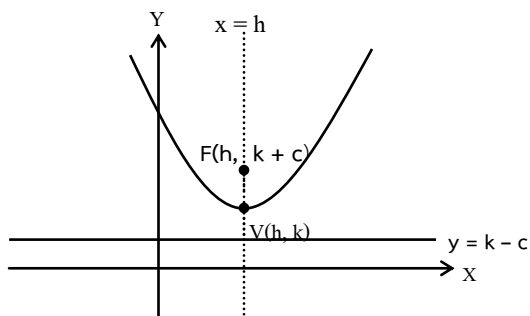
$$(x - h)^2 = 4c(y - k)$$

$c > 0$ หงาย , $c < 0$ คว่ำ

สมการ $Ay^2 + By + Cx + D = 0$

$$(y - k)^2 = 4c(x - h)$$

$c > 0$ ขวา , $c < 0$ ซ้าย





ตัวอย่างที่ 5

1. จงหาจุดยอด จุดโฟกัส เส้นไดเรกตริกซ์ ความยาวลาตัสเรกตัม และวาดกราฟของพาราโบลาที่มีสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) $x^2 - 2x + 3y - 1 = 0$

(2) $x^2 + 5x - 8y = 0$

(3) $y^2 - 10x + 5y - 4 = 0$



คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2 เรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวย

2. จงหาสมการของพาราโบลา และวาดกราฟของพาราโบลาและเส้นไคเรกตริกซ์ ในแต่ละข้อต่อไปนี้
- (1) พาราโบลารูปหนึ่ง มีจุดยอดอยู่ที่ $V(3, 4)$ และโฟกัสอยู่ที่จุด $F(1, 4)$

(2) พาราโบลารูปหนึ่ง ซึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุด $F(-1, 2)$ และมีเส้นตรง $y = -4$ เป็นเส้นไคเรกตริกซ์

(3) พาราโบลารูปหนึ่งซึ่งมีแกน Y เป็นแกนของพาราโบลา และมีโฟกัสอยู่ที่จุด $(0, 0)$ และตัดแกน X ที่จุด $(2, 0)$

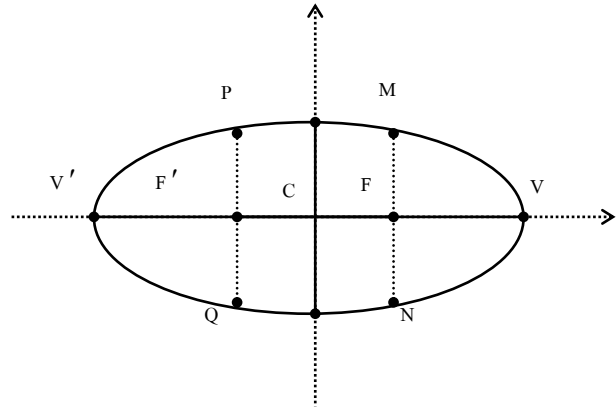


วงรี (Ellipse)

บทนิยาม วงรี คือ เซตของจุดทุกจุดในระนาบ ซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดมีค่าคงที่เสมอ และเท่ากับ $2a$ (จุดคงที่ เรียกว่า จุดโฟกัส)

ส่วนประกอบของวงรี

1. จุด C เรียกว่า จุดศูนย์กลางของวงรี
2. จุด V และ V' เรียกว่า จุดยอดของวงรี
3. จุด F และ F' เรียกว่า จุดโฟกัส
4. VV' เรียกว่า แกนเอก
5. BB' เรียกว่า แกนโท
6. PQ และ MN เรียกว่า ลาดัสแรกตัดของวงรี



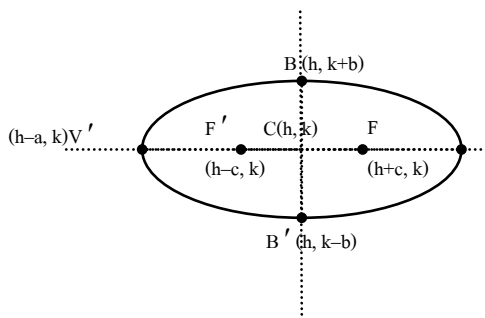
รูปแบบของวงรี

สมการของวงรีในรูปมาตรฐานคือ $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

เมื่อ $A \neq B$ และ A, B มีเครื่องหมายเหมือนกัน

วงรีที่มีแกนเอกขนานกับ แกน X

$$\text{สมการ คือ } \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



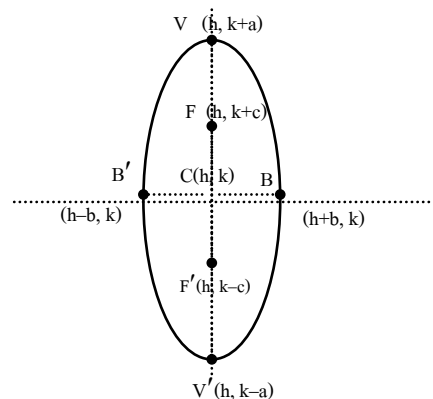
เมื่อ $a^2 = b^2 + c^2$ และ $a^2 > b^2$

ความยาวของลาดัสแรกตัดเท่ากับ $\frac{2b^2}{|a|}$

และความเยื้องศูนย์กลาง เท่ากับ $e = \frac{c}{a}$

วงรีที่มีแกนเอกขนานกับ แกน Y

$$\text{สมการ คือ } \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$





ตัวอย่างที่ 6

1. จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส จุดปลายแกนโท ความยาวเลตัสเรกตัม และวาดกราฟของวงรีต่อไปนี้

(1) $x^2 + 3y^2 - 9 = 0$

(2) $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 92 = 0$

(3) $25x^2 + 9y^2 - 50x + 36y - 164 = 0$



คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2 เรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวย

2. จงหาสมการของวงรีที่มีเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) โฟกัสอยู่ที่จุด $(\pm 4, 0)$ จุดยอดอยู่ที่ $(\pm 5, 0)$

(3) โฟกัสอยู่ที่ $(0, \pm 6)$ และแกนโทยาว 16 หน่วย

(4) จุดยอดอยู่ที่ $(0, \pm 6)$ และผ่านจุด $(3, 2)$

(5) จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่จุด $(6, 3)$ โฟกัสอยู่ที่ $(4, 3)$ และ $(-4, 3)$

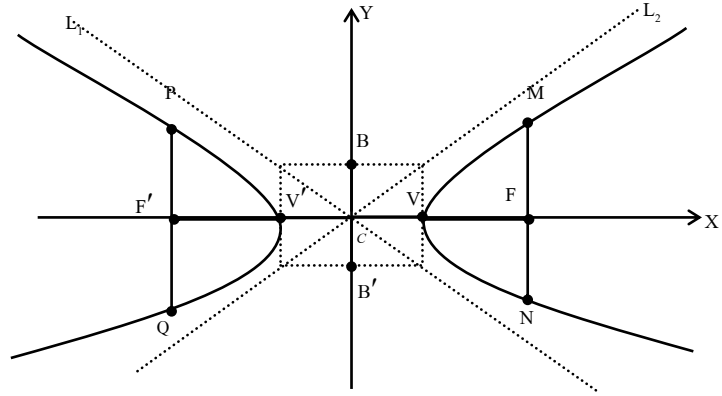


ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola)

บทนิยาม ไฮเพอร์โบลา คือ เซตของจุดทุกจุดในระนาบซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดในระนาบมีค่าคงที่เสมอ และมีค่าเท่ากับ $2a$ (จุดคงที่ เรียกว่า จุดโฟกัส)

ส่วนประกอบของไฮเพอร์โบลา

1. จุด C เรียกว่า จุดศูนย์กลาง
2. จุด V และ V' เรียกว่า จุดยอด
3. จุด F และ F' เรียกว่า จุดโฟกัส
4. VV' เรียกว่า แกนตามขวาง
5. BB' เรียกว่า แกนสังยุค
6. PQ และ MN เรียกว่า ลาดัสเรกตัม
7. L_1 และ L_2 เรียกว่า เส้นกำกับ



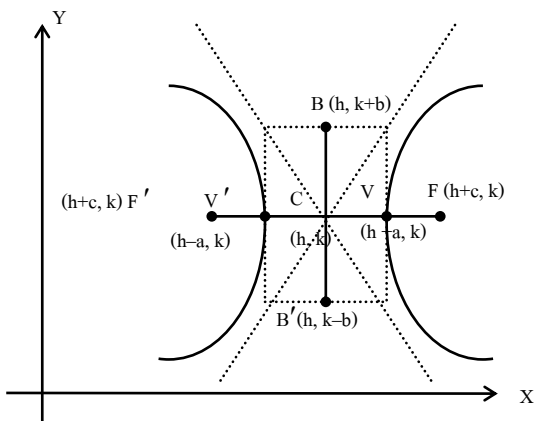
รูปแบบของไฮเพอร์โบลา

สมการของไฮเพอร์โบลาในรูปทั่วไปคือ $Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0$

เมื่อ $A \neq B$ และ A, B มีเครื่องหมายต่างกัน

ไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางขนานแกน X

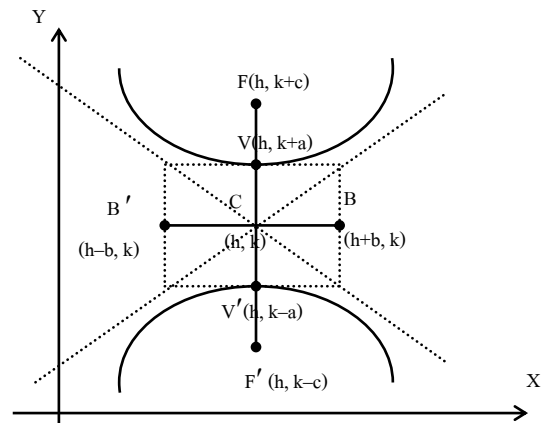
สมการ คือ $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$



สมการเส้นกำกับคือ $y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$

ไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางขนานแกน Y

สมการ คือ $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$



สมการเส้นกำกับคือ $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$

เมื่อ $c^2 = a^2 + b^2$ และ ความยาวของลาดัสเรกตัมเท่ากับ $\frac{2b^2}{|a|}$



ตัวอย่างที่ 7

1. จงวิเคราะห์ส่วนประกอบกราฟไฮเพอร์โบลา ในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) $9x^2 - 4y^2 = 36$

(2) $16y^2 - 25x^2 = 400$

(3) $2x^2 - 3y^2 - 20x - 24y - 16 = 0$



คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2 เรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวย

2. จงหาสมการของไฮเพอร์โบลต่อไปนี้

(1) มีโฟกัสอยู่ที่จุด $(-5, 0)$ และ $(5, 0)$ และจุด $(0, 3)$ เป็นจุดปลายจุดหนึ่งของแกนสังยุค

(2) มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$ แกนตามขวางอยู่บนแกน Y และผ่านจุด $(4, 6)$ และ $(1, -3)$

(3) มีจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่จุด $(6, 0)$ และเส้นกำกับเส้นหนึ่งมีสมการ $4x - 3y = 0$