บทที่ 1 เลขยกกำลัง

1. เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม

1.1 ความหมายของเลขยกกำลัง

จำนวนที่เหมือนกันคูณกันหลายๆ ครั้ง สามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ได้ดังนี้

- $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ เขียนแทนด้วย 5^4
- $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$ เขียนแทนด้วย ....
- $0.3 \times 0.3 \times 0.3$ เขียนแทนด้วย ....
- $(-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6)$ เขียนแทนด้วย ....
- $(ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \cdot (ab)$ เขียนแทนด้วย ....

บทนิยาม ถ้า a เป็นจำนวนจริงใดๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \ldots \times a}_{n \text{ ตัว}}$$

จากบทนิยามข้างต้น a^n ....

a ....

n ....

เช่น 3^2 อ่านว่า “**สามยกกำลังสอง**” หรือ “**สามกำลังสอง**” หรือ “**กำลังสองของสาม**”

3^2 มี 3 .... และ 2 ....

3^2 หมายถึง ....

ตัวอย่างที่ 1 ให้นักเรียนเติมคำตอบลงในช่องว่าง

ข้อที่	เลขยกกำลัง	ฐาน	เลขชี้กำลัง	ความหมาย	ค่าของเลขยกกำลัง	อ่านว่า
1	2^6	2	6	$2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$	64	สองยกกำลังหก
2	$(-7)^3$					
3		$\frac{3}{5}$	5			
4		$-\frac{1}{3}$	2			
5	. -4^2					
6	$(a^3)^7$					
7		$x+y$	2			

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของเลขยกกำลัง

1) 8×16

วิธีทำ

3) 24×18

วิธีทำ

2) 75×15

วิธีทำ

1.2 สมบัติของเลขยกกำลัง

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง m และ n เป็นจำนวนเต็ม จะได้

1. การคูณเลขยกกำลัง

ถ้าเลขยกกำลังฐานเหมือนกันคูณกัน ให้นำเลขชี้กำลังมาบวกกัน โดยใช้ฐานเป็นตัวเดิม

นั่นคือ ....

2. การหารเลขยกกำลัง

ถ้าเลขยกกำลังฐานเหมือนกันหารกัน ให้นำเลขชี้กำลังมาของตัวตั้ง ลบออกด้วยเลขชี้กำลังของตัวหาร โดยใช้ฐานเป็นตัวเดิม นั่นคือ ....

3. เลขยกกำลังซ้อน

ให้นำเลขชี้กำลังมาคูณกันได้เลย นั่นคือ ....

4. เลขยกกำลังของผลคูณ

ให้กระจายเป็นผลคูณของเลขยกกำลังแต่ละตัวได้เลย

นั่นคือ ....

5. เลขยกกำลังของผลหาร

ให้กระจายเป็นผลหารของเลขยกกำลังแต่ละตัวได้เลย

นั่นคือ ....

6. เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นลบ

ให้เขียนเป็นส่วนกลับของเลขยกกำลัง ที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวกแทนได้

นั่นคือ ....

7. เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นศูนย์ (0)

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็น 0 มีค่าเท่ากับ 1 เสมอ ยกเว้นเลขยกกำลังที่มีฐานเป็น 0

นั่นคือ ....

***** หมายเหตุ**

0^0 ไม่นิยามในทางคณิตศาสตร์

รูปจาก 123RF.com

สรุปสมบัติของเลขยกกำลัง

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง m และ n เป็นจำนวนเต็ม จะได้

1. $a^m \bullet a^n = a^{m+n}$
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $\left(a^m\right)^n = \left(a^n\right)^m = a^{mn}$
4. $(ab)^m = a^m b^m$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$; $b \neq 0$
6. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$; $a \neq 0$
7. $a^0 = 1$; $a \neq 0$
8. 0^0 ไม่นิยาม

รูปจาก pngtree.com

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของจำนวนต่อไปนี้ และบอกสมบัติที่นำมาใช้

1) $3^2 \times 3^3 = 3\times3\times3\times3\times3 = 3^5 = 243$ (บทนิยาม)

หรือ $3^2 \times 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 = 243$ (สมบัติการคูณเลขยกกำลัง)

2) $\left(2^3\right)^4 =$ ....

3) $5^{-2} =$ ....

4) $y^4 \times y^7 =$ ....

5) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 =$ ....

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ตัวแปรทุกตัวเป็นจำนวนจริง ที่ไม่เป็น 0 จงหาคำตอบของจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย และมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

1) $\dfrac{\left(ab^2\right)^3}{a^5b^4}$

วิธีทำ

2) $\left(\dfrac{6a^{-3}b^{-2}}{3a^2b^{-5}}\right)^{-2} \div \left(\dfrac{2a^2b^{-2}}{\left(a^{-2}b^{-3}\right)}\right)^2$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็ม จงหาคำตอบของจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1) $\dfrac{2^{n+2}-2\cdot 2^{n}}{2\left(2^{n+3}\right)}$

วิธีทำ

2) $\dfrac{\left(2^{p+1}\right)^{q}}{\left(2^{q+1}\right)^{p}}\times\dfrac{2^{2p}}{2^{2q}}\times 2^{q}$

วิธีทำ

3) $\dfrac{9^{2}\left(27\right)^{2-n}}{\left(81\right)^{-n}\,27^{3}\left(3\right)^{n-1}}$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 6 จงทำให้จำนวนต่อไปนี้เป็นผลสำเร็จ

1) $\dfrac{10^{15}\cdot 9^{7}}{15^{14}\cdot 8^{4}}$

วิธีทำ

2) $\left(\dfrac{3^{2}\cdot 2^{4}}{4^{3}}\right)^{2}$

วิธีทำ

3) $\dfrac{3^{-2}\times 9^{2}}{3^{4}}$

วิธีทำ

4) $\dfrac{3^{0}+2^{0}}{2^{-3}}$

วิธีทำ

Worksheet1

1. จงทำให้เป็นผลสำเร็จ และบอกสมบัติที่นำมาใช้

1) $\dfrac{2^6}{2^5} =$ ....

2) $0^0 =$ ....

3) $\left(2y^3\right)^4 =$ ....

4) $\left(-9\right)^0 =$ ....

5) $\dfrac{x}{x^{-2}} =$ ....

2. กำหนดให้ตัวแปรทุกตัวเป็นจำนวนจริง ที่ไม่เป็น 0 จงหาคำตอบของจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย และมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

1) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^3\left(\dfrac{b^2a}{c}\right)^4$

วิธีทำ

2) $\left(\dfrac{x^5y^4z^3}{x^4y^7}\right)^3$

วิธีทำ

3) $\left(\dfrac{a^5b^3c^2}{a^4b^7}\right)^3$

วิธีทำ

4) $\left(a\left(a\left(a^{-1}\right)\right)^{-1}\right)^{-1}$

วิธีทำ

5) $\dfrac{a^{-3}+b^{-3}}{a^{-1}+b^{-1}}$

วิธีทำ

6) $\left(\dfrac{a^{-2}b^{3}}{a^{3}b^{-2}}\right)^{2}\left(\dfrac{a^{4}b^{-2}}{a^{0}b^{-5}}\right)^{3}$

วิธีทำ

7) $\left(\dfrac{a^{2}b^{-1}}{a^{-2}b^{-4}}\right)^{-3}\left(\dfrac{a^{-2}b^{2}}{a^{-5}b^{-3}}\right)^{2}$

วิธีทำ

3. จงทำให้จำนวนต่อไปนี้เป็นผลสำเร็จ

1) $\dfrac{7^3 \times 7^5}{7^8}$

วิธีทำ

2) $\dfrac{2^3 \cdot 5^{-6}}{5^{-8} \cdot 2^0}$

วิธีทำ

3. กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็ม จงหาคำตอบของจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1) $\dfrac{3 \cdot 2^n - 4 \cdot 2^{n-2}}{2^n - 2^{n-1}}$

วิธีทำ

2) $\dfrac{5 \cdot 3^{\mathrm{n}} - 9 \cdot 3^{\mathrm{n}-2}}{3^{\mathrm{n}} - 3^{\mathrm{n}-1}}$

วิธีทำ

3) $\dfrac{5 \cdot 3^n - 9 \cdot 3^{n-2}}{3^n - 3^{n-1}}$

วิธีทำ

4) $\dfrac{15 \times 7^{\mathrm{a}} - 9 \times 7^{\mathrm{a}+1}}{9 \times 7^{\mathrm{a}} + 7^{\mathrm{a}+1}}$

วิธีทำ

5) $\dfrac{2^{n+1}}{(2^{n})^{n-1}} \div \dfrac{4^{n+1}}{\left(2^{n-1}\right)^{n+1}}$

วิธีทำ

6) $\dfrac{10 \cdot 2^{n-1} - 24 \cdot 2^{n-1}}{2^{n+1} \cdot 3 - 2^{n}}$

วิธีทำ

2. รากที่ n ของจำนวนจริง

2.1 ทบทวน รากที่สองของจำนวนจริง

บทนิยาม ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง b เป็นรากที่สองของ a ก็ต่อเมื่อ $b^2 = a$

ตัวอย่างที่ 7 จงหารากที่สองของจำนวนต่อไปนี้ พร้อมบอกเหตุผล

วิธีทำ รากที่สองของ 4 คือ 2 และ -2 เพราะ $2^2 = 4$ และ $(-2)^2 = 4$ ... จากบทนิยาม

รากที่สองของ 49 คือ .... เพราะ ....

รากที่สองของ $\frac{36}{25}$ คือ .... เพราะ ....

รากที่สองของ 12 คือ .... เพราะ ....

ตัวอย่างที่ 8 จงหารากที่สามของจำนวนต่อไปนี้ พร้อมบอกเหตุผล

วิธีทำ รากที่สามของ 8 คือ .... เพราะ ....

รากที่สามของ -64 คือ .... เพราะ ....

รากที่สามของ $\frac{125}{27}$ คือ .... เพราะ ....

2.2 บทนิยามของรากที่ n ของจำนวนจริง

บทนิยาม ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 a และ b เป็นจำนวนจริง
b เป็นรากที่ n ของ a ก็ต่อเมื่อ $b^n = a$

ตัวอย่างที่ 9 จากบทนิยามจะเห็นว่า

1) จาก $2^3 = 8$ ดังนั้น 2 เป็นรากที่ 3 ของ 8

2) จาก $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ ดังนั้น .... เป็นรากที่ .... ของ ....

3) จาก $(-3)^5 = -243$ ดังนั้น .... เป็นรากที่ .... ของ ....

4) จาก $5^4 = 625$ และ $(-5)^4 = 625$ ดังนั้น .... เป็นรากที่ .... ของ ....

เมื่อแยกพิจารณา n เป็นจำนวนเต็มคู่ หรือ เป็นจำนวนเต็มคี่ ได้ดังตารางข้างล่างนี้

n เป็นจำนวนเต็มคู่	n เป็นจำนวนเต็มคี่
1. รากที่ n ของ a จะหาค่าได้เมื่อ $a \geq 0$ เท่านั้น 2. ถ้า $a = 0$ แล้วรากที่ n ของ $a = 0$ 3. ถ้า $a > 0$ (เป็นบวก) รากที่ n ของ a จะมีค่า สองค่าเสมอเป็นบวกและลบ 4. ถ้า $a < 0$ (เป็นลบ) รากที่ n ของ a จะ**หาค่าไม่ได้ในระบบจำนวนจริง**	1. รากที่ n ของ a หาค่าได้เสมอสำหรับจำนวนจริงใดใด 2. ถ้า $a = 0$ แล้วรากที่ n ของ $a = 0$ 3. ถ้า $a > 0$ (เป็นบวก) รากที่ n ของ a จะมี 1 ค่า และเป็นจำนวนจริงบวก 4. ถ้า $a < 0$ (เป็นลบ) รากที่ n ของ a จะมี 1 ค่า และเป็นจำนวนจริงลบ

ตัวอย่างที่ 10 จงเติมคำตอบลงในช่องว่าง

1) รากที่ 4 ของ 16 คือ .... เนื่องจาก ....

2) รากที่ 3 ของ -343 คือ .... เนื่องจาก ....

3) รากที่ 5 ของ -243 คือ .... เนื่องจาก ....

2.3 ค่าหลักของรากที่ n

บทนิยาม ให้ a เป็นจำนวนจริงที่มีรากที่ n จะกล่าวว่าจำนวนจริง b เป็นค่าหลักของรากที่ n ของ a ก็ต่อเมื่อ

1. b เป็นรากที่ n ของ a
2. $a \cdot b \geq 0$

เขียนแทนค่าหลักของรากที่ n ของ a ด้วย $\sqrt[n]{a} = b$

เช่น ....

....

....

....

ข้อตกลงเกี่ยวกับค่าหลักของรากที่ n

1. เครื่องหมาย $\sqrt[n]{\ldots}$ เรียกว่า “**เครื่องหมายกรณฑ์**” หรือ “**ราก**” หรือ “Root” และเรียก n ว่า <u>อันดับของกรณฑ์</u>

2. $\sqrt[n]{a}$ อ่านว่า “กรณฑ์ที่ n ของ a” หรือ “รากที่ n ของ a”

3. รากที่สองของ a จะเขียนแทนด้วย $\sqrt{a}$

ตัวอย่างที่ 11 จำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้ บอกอะไรกับนักเรียนบ้าง

1) $\sqrt{4} = 2$ แสดงว่า ค่าหลักของรากที่สอง ของ 4 คือ 2

แต่ รากที่สองของ 4 คือ 2 และ -2

2) $\sqrt[6]{729} = 3$ แสดงว่า ค่าหลักของรากที่ .... ของ .... คือ ....

ข้อสังเกต เกี่ยวกับค่าหลักของรากที่ n ของจำนวนจริง a ($\sqrt[n]{a}$) มีดังนี้

1) ถ้า $a = 0$ แล้ว $\sqrt[n]{a} = 0$

2) ถ้า $a > 0$ แล้ว $\sqrt[n]{a}$ เป็นจำนวนจริงบวก

3) ถ้า $a < 0$ และ n เป็นจำนวนคี่ แล้ว $\sqrt[n]{a}$ เป็นจำนวนจริงลบ

ถ้า $a < 0$ และ n เป็นจำนวนคู่ แล้ว **รากที่ n ของ a หาค่าไม่ได้** ($\sqrt[n]{a}$ หาค่าไม่ได้)

ตัวอย่างที่ 12 จงหาค่าหลักต่อไปนี้

1) ค่าหลักของรากที่ 2 ของ $\frac{4}{81}$ คือ ....

2) ค่าหลักของรากที่ 2 ของ $\frac{625}{169}$ คือ ....

3) ค่าหลักของรากที่ 4 ของ 81 คือ ....

4) ค่าหลักของรากที่ 4 ของ 16 คือ ....

5) ค่าหลักของรากที่ 5 ของ -32 คือ ....

6) ค่าหลักของรากที่ 6 ของ 729 คือ ....

7) ค่าหลักของรากที่ 7 ของ -128 คือ ....

8) ค่าหลักของรากที่ 7 ของ -1 คือ ....

9) ค่าหลักของรากที่ 8 ของ 1 คือ ....

10) ค่าหลักของรากที่ 8 ของ -256 คือ ....

สมบัติของรากที่ n (เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1)

ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $\sqrt[n]{a}$ และ $\sqrt[n]{b}$ หาค่าได้ แล้ว

1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ เมื่อ $\sqrt[n]{a}$ เป็นจำนวนจริง

2) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

3) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; $b \neq 0$

4) $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a \geq 0 \\ a & \text{เมื่อ } a < 0 \text{ และ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่บวก} \\ |a| & \text{เมื่อ } a < 0 \text{ และ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่บวก} \end{cases}$

รูปจาก pngtree.com

ตารางแสดงสมบัติของรากที่ n **และตัวอย่าง**

ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $\sqrt[n]{a}$ และ $\sqrt[n]{b}$ หาค่าได้ แล้ว

สมบัติของรากที่ n	ตัวอย่าง
1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ เมื่อ $\sqrt[n]{a}$ เป็นจำนวนจริง	$\left(\sqrt{7}\right)^2 =$ ....
2) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	$\sqrt{50} =$ ....
3) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; $b \neq 0$	$\sqrt[3]{\frac{5}{27}} =$ ....
4) $\sqrt[n]{a^n} = a$ เมื่อ $a \geq 0$ $\sqrt[n]{a^n} = a$ เมื่อ $a < 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มคี่บวก $\sqrt[n]{a^n} = \|a\|$ เมื่อ $a < 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มคู่บวก	$\sqrt{3^2} =$ .... $\sqrt[5]{(-9)^5} =$ .... $\sqrt[8]{(-39)^8} =$ .... $=$ ....

*** **ท้าให้คิด** $\sqrt{(-2)(-5)} = \sqrt{-2}\sqrt{-5}$ เท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด

ตัวอย่างที่ 13 จงทำจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1) $\sqrt{8}$ = ...

2) $\sqrt{162}$ = ...

3) $\sqrt[3]{7}\sqrt[3]{49}$ = ...

4) $\sqrt[3]{16}$ = ...

5) $\sqrt[3]{81}$ = ...

6) $\sqrt[3]{54}$ = ...

7) $\sqrt[4]{64}$ = ...

8) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ = ...

9) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^4$ = ...

10) $\sqrt{\frac{a^8b^6}{c^2}}$; $a,b \geq 0,\ c > 0$

วิธีทำ

แบบฝึกหัด 1

1. จงเติมคำตอบลงในช่องว่างให้ถูกต้อง

1) รากที่สองของ 144 เท่ากับ ....

ค่าหลักของรากที่สองของ 144 เท่ากับ ....

2) รากที่สามของ 729 เท่ากับ ....

ค่าหลักของรากที่สองของ 729 เท่ากับ ....

3) รากที่สามของ -512 เท่ากับ ....

ค่าหลักของรากที่สองของ -512 เท่ากับ ....

4) รากที่หกของ 64 เท่ากับ ....

ค่าหลักของรากที่สองของ 64 เท่ากับ ....

2. จงทำจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1) $\sqrt[4]{81}$

2) $\sqrt[6]{729}$

3) $\sqrt{169-25}$

4) $-\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{-18}$

5) $3\sqrt{x}\cdot\sqrt{2y}$

6) $\sqrt{(x-1)}\cdot\sqrt{(x+1)}$

7) $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$

8) $\dfrac{\sqrt[3]{-81}}{\sqrt[3]{3}}$

3) จงหาผลสำเร็จในแต่ละข้อต่อไปนี้ โดยใช้สมบัติ $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a \ge 0 \\ a & \text{เมื่อ } a < 0 \text{ และ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่บวก} \\ |a| & \text{เมื่อ } a < 0 \text{ และ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่บวก} \end{cases}$

1) $\sqrt{4^2}$

2) $\sqrt[3]{(-8)^3}$

3) $\sqrt[4]{(-5)^4}$

4) $\sqrt[6]{(-3)^6}$

5) $\sqrt[3]{8\times(-12)^3\times 6^6}$

6) $\sqrt[5]{2\times 6^5\times 9^{10}\times 4^7}$

3. **การหาผลบวก ผลต่าง ผลคูณ และผลหารของจำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์**

3.1 การหาผลบวก ผลต่างของจำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์

<u>หลักการ</u>

1. กรณฑ์ที่จะนำมา **บวก ลบ** กันได้ ก็ต่อเมื่อ กรณฑ์มีอันดับเดียวกันและจำนวนที่อยู่ใต้กรณฑ์เป็นจำนวนเดียวกัน

2. การที่ทำให้จำนวนที่อยู่ใต้กรณฑ์เท่ากัน โดยทำให้จำนวนใต้กรณฑ์เป็นจำนวนเฉพาะหรือจำนวนที่ต่ำที่สุด

3. การบวก ลบ กรณฑ์ที่เหมือนกัน ให้นำสัมประสิทธิ์หน้ากรณฑ์มา **บวก ลบ** กัน

$$\boxed{a\sqrt[n]{x} \pm b\sqrt[n]{x} = (a \pm b)\sqrt[n]{x}}$$

เช่น ....

ตัวอย่างที่ 14 จงหาผลบวกหรือผลต่างของจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1) $2\sqrt{32} + \sqrt{8} - 6\sqrt{2}$

วิธีทำ

2) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{5}} + \frac{4}{2}\sqrt{\frac{1}{5}} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{5}}$

วิธีทำ

3) $\sqrt{49} + \sqrt{64}$

วิธีทำ

4) $3\sqrt{3} + \sqrt{243} - 2\sqrt{27}$

วิธีทำ

worksheet2

1) $\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{-54} - \sqrt[3]{250}$

วิธีทำ

2) $\sqrt[3]{27x} + \sqrt[3]{8x}$

วิธีทำ

3) $\sqrt{9y^6} - 7\sqrt{y^3}$

วิธีทำ

4) $2\sqrt{18} + \sqrt{200} - 2\sqrt[4]{64}$

วิธีทำ

5) $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{432}$

วิธีทำ

6) $\sqrt[3]{5} - 7\sqrt[3]{40} - 3\sqrt[3]{-625}$

วิธีทำ

แบบฝึกหัด 2

1. จงหาผลบวก หรือผลต่างของจำนวนในแต่ละข้อในรูปอย่างง่าย

1) $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}$

2) $7\sqrt{3}-\sqrt{3}$

3) $11\sqrt{5}-6\sqrt{5}-7\sqrt{5}$

4) $5\sqrt{5}-\sqrt{5}+3\sqrt{5}$

5) $5\sqrt{5}-\sqrt{2}+3\sqrt{5}+4\sqrt{2}$

6) $5\sqrt{2}+4\sqrt{3}-2\sqrt{2}-6\sqrt{3}$

7) $4\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{2}-6\sqrt[3]{2}$

8) $7\sqrt{a}+2\sqrt{a}-9\sqrt{a}$

9) $4\sqrt{13}+8+5\sqrt{13}-7$

10) $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-7\sqrt{3}+5\sqrt{2}$

2. จงทำให้อยู่ในรูปสำเร็จ

1) $\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{3}$

2) $3\sqrt{20}+2\sqrt{18}-\sqrt{45}+\sqrt{8}$

3) $\sqrt{18}+2\sqrt{18}-\sqrt{45}+\sqrt{8}$

4) $\sqrt{32}-\sqrt{48}-\sqrt{80}$

5) $\sqrt{18}+2\sqrt[3]{-125}-3\sqrt[4]{4}$

6) $\sqrt{3}+\sqrt{\frac{1}{3}}$

3.2 การหาผลคูณ ผลหารของจำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์

หลักการ

1. กรณฑ์จะคูณ หรือหาร กันได้ ก็ต่อเมื่อ อันดับของกรณฑ์ต้องเท่ากัน
2. เมื่ออันดับของกรณฑ์เท่ากันให้

 2.1 นำเอาสัมประสิทธิ์หน้ากรณฑ์คูณ หรือหาร กัน

 2.2 นำเอาจำนวนที่อยู่ในกรณฑ์คูณ หรือหาร กันภายใต้กรณฑ์ โดยที่อันดับของกรณฑ์ยังคงเหมือนเดิม

ตัวอย่างที่ 15 จงหาผลคูณหรือผลหารของจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1) $3\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{28}$

วิธีทำ

2) $\dfrac{3\sqrt[3]{2}\cdot 2\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{3}}$

วิธีทำ

3) $\dfrac{5\sqrt{108}}{\sqrt{3}}$

วิธีทำ

4) $\sqrt[5]{-25}\sqrt[5]{125}$

วิธีทำ

5) $\sqrt[6]{32x^4y^5z^3}\cdot\sqrt[6]{2x^2yz^3}$

วิธีทำ

6) $\dfrac{\sqrt{27a^5b^7}}{\sqrt{3ab}}$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 16 จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

1) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}$ = ...

2) $\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{49}$ = ...

3) $2\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{6}$ = ...

4) $\sqrt[3]{54}\cdot\sqrt[3]{4}$ = ...

5) $-\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{-18}$ = ...

6) $\dfrac{\sqrt{64}}{\sqrt{2}}$ = ...

7) $\dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$ = ...

8) $\dfrac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}}$ = ...

9) $\dfrac{\sqrt[6]{256}}{\sqrt[6]{2}}$ = ...

10) $\dfrac{\sqrt[3]{-80}}{\sqrt[3]{2}}$ = ...

ตัวอย่างที่ 17 จงหาผลสำเร็จต่อไปนี้

1) $\dfrac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{-4}}$

วิธีทำ

2) $\dfrac{\sqrt[5]{-27}\sqrt[5]{45}}{\sqrt[5]{-5}}$

วิธีทำ

3) $\dfrac{\sqrt[4]{60}\sqrt[4]{28}}{\sqrt[4]{189}\sqrt[4]{45}}$

วิธีทำ

4) $\dfrac{\sqrt[4]{12}\sqrt[4]{54}}{\sqrt[4]{20}\sqrt[4]{250}}$

วิธีทำ

3.2.1. สังยุค (conjugate)

สังยุคหรือคอนจุเกต(conjugate)

การคูณหรือการหารรากมักจะใช้ conjugate เพื่อให้รากของตัวส่วนหายไป

บทนิยาม ให้ $\sqrt{a}$ และ $\sqrt{b}$ หาค่าได้

1.) คอนจุเกตของ $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ คือ $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

2.) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$

มาจาก ⇨ ผลต่างกำลังสอง $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

ตัวอย่างที่ 18 คอนจุเกตของ $(\sqrt{5}+\sqrt{2})$ คือ $(\sqrt{5}-\sqrt{2})$

และ $(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2}) = (\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2$

$= 5-2 = 3$

ผลต่างกำลังสอง
$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

ตัวอย่างที่ 19 คอนจุเกตของ $(3-\sqrt{2})$ คือ $(3+\sqrt{2})$

และ $(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})$ =……………………………………………………………………

=……………………………………………………………………

ผลต่างกำลังสอง
$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

ตัวอย่างที่ 20 จงหาผลคูณของ $(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 21 จงหาผลคูณของ $(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})$

วิธีทำ

3.2.2 การเขียนจำนวนให้ตัวส่วนอยู่ในรูปที่ไม่ติดกรณฑ์

กรณีที่ 1 ส่วนที่มีกรณฑ์เพียงพจน์เดียว

เช่น $\frac{a}{\sqrt{b}}$ นักเรียนสามารถคูณ $\sqrt{b}$ เข้าทั้งเศษและส่วนของ $\frac{a}{\sqrt{b}}$ ซึ่งจะได้ดังนี้

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b^2}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

ตัวอย่างที่ 22 จงหาผลหารของจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย และทำให้ตัวส่วนไม่ติดกรณฑ์

1) $\frac{9}{\sqrt{3}}$

วิธีทำ

2) $\frac{4\sqrt{108}}{\sqrt{3}}$

วิธีทำ

กรณีที่ 2 ส่วนที่มีกรณฑ์ 2 พจน์บวกกัน

เช่น $\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ หรือ $\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

สามารถแก้โดยใช้หลักการ ผลต่างกำลังสอง $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$

ซึ่งเรียก $(a-b)$ กับ $(a+b)$ ว่าเป็นคู่สังยุค (conjugate) :ซึ่งกันและกัน

ตัวอย่างที่ 23 จงทำให้จำนวนต่อไปนี้อยู่ในรูปอย่างง่าย และทำให้ตัวส่วนไม่ติดกรณฑ์

1) $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$

วิธีทำ

2) $\frac{2\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

วิธีทำ

3) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

วิธีทำ

5) $\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{10}-\sqrt{5}}$

วิธีทำ

แบบฝึกหัด 3

1. จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

1) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}$

2) $\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{49}$

3) $-\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{-18}$

4) $\dfrac{\sqrt{64}}{\sqrt{2}}$

5) $\dfrac{\sqrt[6]{256}}{\sqrt[6]{2}}$

6) $\dfrac{\sqrt[3]{-80}}{\sqrt[3]{2}}$

7) $\dfrac{\sqrt[4]{60}\sqrt[4]{28}}{\sqrt[4]{189}\sqrt[4]{45}}$

8) $\dfrac{\sqrt[4]{12}\sqrt[4]{54}}{\sqrt[4]{20}\sqrt[4]{250}}$

9) $\sqrt[4]{81a^{12}b^{8}}$

10) $\sqrt[6]{64a^{12}b^{18}}$

11) $\sqrt{10a^3b}\times\sqrt{2ab^2}$

12) $\sqrt{3ab^3c}\times\sqrt{2a^2bc^4}\times\sqrt{6a^3b^4c^3}$

2. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปตัวส่วนไม่ติดกรณฑ์

1) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

2) $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$

3) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4) $\dfrac{7\sqrt{6}+3\sqrt{5}}{4\sqrt{6}+\sqrt{5}}$

5) $\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{10}}{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}$

6) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

7) $\dfrac{6\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$

8) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

9) $\dfrac{\sqrt{6}-3}{2-\sqrt{6}}$

10) $\dfrac{3a}{5}\sqrt{\dfrac{10x^3}{21a^2}}\cdot\dfrac{1}{6}\sqrt{\dfrac{7a}{3x}}$

4. เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

บทนิยาม เมื่อ a เป็นจำนวนจริง n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 และ a มีรากที่ n

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

จากนิยามจะเห็นว่า $a^{\frac{1}{n}}$ เป็นค่าหลักของรากที่ n ของ a และจะได้ว่า $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$

ตัวอย่างที่ 24 ....

....

บทนิยาม ให้ a เป็นจำนวนจริง m และ n เป็นจำนวนเต็มที่ $n > 1$ และ $\frac{m}{n}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

จะได้ว่า $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$; $a > 0$

$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$; $a < 0$ และ n เป็นจำนวนคี่

เช่น ....

....

หมายเหตุ จากบทนิยามของ $a^{\frac{m}{n}}$ ถ้า $m < 0$ แล้ว a ต้องไม่เป็น 0 เช่น

ให้ $a = 0,\ m = -1$ และ $n = 2$

จะได้ $a^{\frac{m}{n}} = 0^{\frac{-1}{2}} = \left(0^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = (0)^{-1} = \frac{1}{0}$

ซึ่ง $\frac{1}{0}$ ไม่นิยามในทางคณิตศาสตร์

ตัวอย่างที่ 25 จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเลขยกกำลัง

1) $\sqrt{9} =$ .... 5) $\sqrt{3} =$ ....

2) $\sqrt[5]{3^2} =$ .... 6) $\sqrt[4]{5x^2y} =$ ....

3) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{16^5}} =$ .... 7) $\sqrt[6]{7x^5} =$ ....

4) $\left(\sqrt[5n]{2}\right)^6 =$ .... 8) $\sqrt[6]{7x^5} =$ ....

ตัวอย่างที่ 26 จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปกรณฑ์

1) $16^{\frac{1}{4}} =$ .... 4) $(-xy)^{\frac{3}{2}} =$ ....

2) $\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^5 =$ .... 5) $(x-y)^{\frac{3}{7}} =$ ....

3) $5^{\frac{3}{4}} =$ .... 6) $(4x^2y)^{\frac{3}{5}} =$ ....

4) $7^{\frac{7}{5}} =$ .... 8) $(3xy)^{\frac{2}{3}} =$ ....

ตัวอย่างที่ 27 จงหาค่าของเลขยกกำลังต่อไปนี้

1) $\left((125)^{\frac{1}{3}}\right)^2$

วิธีทำ

2) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{25}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$

วิธีทำ

3) $8^{\frac{3}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{4}}$

วิธีทำ

4) $\dfrac{(2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}})^8}{(4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{6}})^6}$

วิธีทำ

5) $\left(\dfrac{8^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{6}}b^2c^{\frac{1}{3}}}{2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}c^{\frac{2}{3}}}\right)^3$

วิธีทำ

แบบฝึกหัด 4

1. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเลขยกกำลัง

1) $\sqrt[3]{3^2}$ 2) $\sqrt[n]{64}$ 3) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{256}}$ 4) $\left(\sqrt[3]{x^3-1}\right)^n$

2. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปกรณฑ์

1) $9^{\frac{1}{3}}$ 2) $7^{\frac{5}{2}}$ 3) $\left(7^{\frac{1}{5}}\right)^4$ 4) $\left(9x^3y^5\right)^{\frac{7}{2}}$

3. จงทำเป็นรูปอย่างง่าย

1) $\left(\dfrac{625}{81}\right)^{\frac{3}{4}}$ 2) $\left(\dfrac{1}{144}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{343}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$ 3) $\dfrac{(9a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{5}{4}})^4}{(3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{9}})^9}$ 4) $\dfrac{(8a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}c^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{6}}}{(4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{5}})^{\frac{1}{4}}}$

4.1 สมบัติของเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง m และ n เป็นเลขชี้กำลังที่เป็นจำนวนตรรกยะ จะได้ว่า

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ เมื่อ $a \neq 0$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ เมื่อ $b \neq 0$

ตัวอย่างที่ 28 ให้นักเรียนยกตัวอย่างเลขยกกำลังให้ตรงกับสมบัติของเลขยกกำลังในแต่ละข้อ

สมบัติ	ตัวอย่าง
1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	
2. $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$	
3. $(a^m)^n = a^{mn}$	
4. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ เมื่อ $a \neq 0$	
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ เมื่อ $b \neq 0$	

ตัวอย่างที่ 29 จงหาค่าของเลขยกกำลังต่อไปนี้

1) $18^{\frac{1}{2}} + 50^{\frac{1}{2}}$

วิธีทำ

2) $(3)^{\frac{1}{2}}(3)^{\frac{1}{3}}$

วิธีทำ

3) $8^{\frac{2}{3}} \cdot 9^{\frac{3}{2}}$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 30 จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย (กำหนดให้ตัวแปรทุกตัวเป็นจำนวนจริงบวก)

1) $5a\left(2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right)$

วิธีทำ

2) $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{3}}}\right)^3$

วิธีทำ

3) $\dfrac{\left(a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{5}{2}}\right)^{4}}{\left(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{5}{6}}\right)^{6}}$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 31 จงหาค่าของ

1) $\left((125)^{\frac{1}{3}}\right)^{2} =$ ....

2) $\left(10^{\frac{1}{3}}\cdot 10^{\frac{-1}{6}}\right)^{6} =$ ....

3) $(27)^{\frac{2}{3}}-(25)^{\frac{1}{2}}-(8)^{-\frac{2}{3}}(7)^{0} =$ ....

....

4) $3^{0}+(0.125)^{\frac{1}{3}}+\left(27^{\frac{1}{3}}\right)\cdot(9)^{\frac{1}{2}} =$ ....

....

Worksheet 3 เรื่อง เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

1. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปกรณฑ์

1) $8^{\frac{1}{3}}$ = ...

2) $64^{\frac{1}{4}}$ = ...

3) $(-5)^{\frac{3}{4}}$ = ...

4) $(-243)^{\frac{1}{5}}$ = ...

5) $(27)^{\frac{2}{3}}$ =..

6) $16^{\frac{3}{4}}$ =..

7) $(144)^{\frac{3}{2}}$ =..

2. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเลขยกกำลัง

1) $\sqrt[3]{6^2}$ = ...

2) $\sqrt[4]{\frac{1}{256}}$ = ...

3) $\sqrt[4]{64^3}$ = ...

4) $\sqrt[3]{512}$ = ...

5) $\sqrt[3]{-125}$ = ...

6) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$ = ...

3. จงหาค่าจำนวนต่อไปนี้

1) $(81)^{\frac{3}{4}}$ =..

2) $(1024)^{\frac{2}{5}}$ = ...

3) $\left[(-8)^4\right]^{\frac{1}{6}}$ = ...

4. จงหาค่าของเลขยกกำลังต่อไปนี้

1) $\left(\frac{27}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$

2) $\left(\frac{625}{81}\right)^{\frac{3}{4}}$

3) $\left(-\frac{243}{32}\right)^{-\frac{2}{5}}$

4) $\left(\frac{256}{625}\right)^{\frac{3}{4}}$

5) $\left(\frac{1}{144}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{343}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$

6) $\dfrac{(8a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}c^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{6}}}{(4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{5}})^{\frac{1}{4}}}$

6. การแก้สมการที่อยู่ในรูปเลขยกกำลัง

การแก้สมการที่อยู่ในรูปเลขยกกำลัง สามารถทำได้โดยการปรับฐานของเลขยกกำลังให้เท่ากันหรือการปรับเลขชี้กำลังของเลขยกกำลังให้เท่ากัน โดยใช้สมบัติต่างๆ ของเลขยกกำลังมาช่วยในการปรับให้เท่ากัน ดังนิยามต่อไปนี้

ถ้า	$a^x = a^y$	โดยที่ $a > 0$ และ $a \neq 0$
แล้ว	$x = y$	

สมบัติเลขยกกำลังเพิ่มเติม

1. $\left(a^m\right)^n = \left(a^{mn}\right) = \left(a^n\right)^m$
2. $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ และ $b^n = \frac{1}{b^{-n}}$
3. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{n}\right)^{-n}$

ตัวอย่างที่ 32 จงหาค่า x ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง

1) $2^x = 4$

2) $2^x = \frac{1}{8}$

3) $2^x = 1$

4) $2^x = -4$

5) $3^x = \frac{1}{81}$

6) $5^x = 125$

7) $7^x = -49$

8) $2^x = 5^x$

ตัวอย่างที่ 33 จงหาค่า x ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง

1) $10^{2x} = 0.0001$

วิธีทำ

2) $16^{x} = 1024$

วิธีทำ

3) $\left(\frac{4}{9}\right)^{1-3x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-8}$

วิธีทำ

4) $(3)^{2x-x^2} = \frac{1}{27}$

4) $81^{x} = 729$