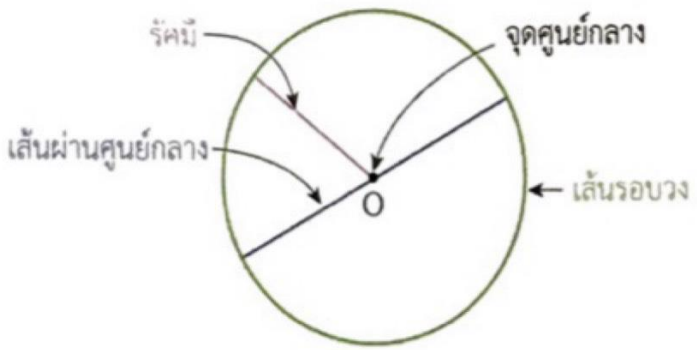
หน่วยที่ 3

วงกลม (CIRCLES)

วงกลมมีส่วนต่างๆ ดังนี้



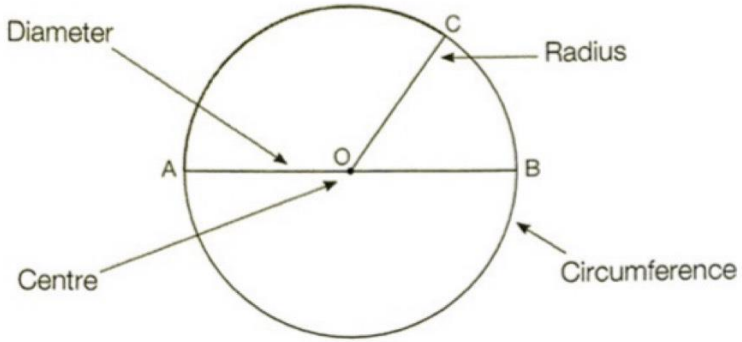
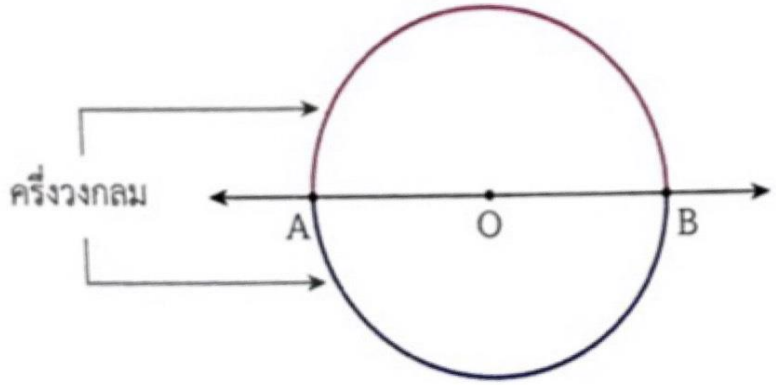


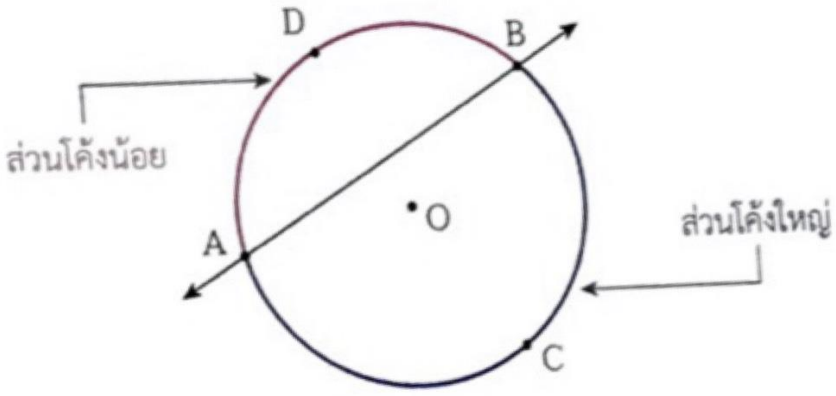
Figure 1

2.1 มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม

- เมื่อเราแบ่งเส้นรอบวงของวงกลมออกเป็น 2 ส่วน ในกรณีที่ส่วนโค้งทั้งสองยาวเท่ากัน จะเรียกส่วนโค้งแต่ละส่วนครึ่งวงกลม (semicircle) ดังรูป



แต่หากส่วนโค้งทั้งสองยาวไม่เท่ากัน ดังรูป



จะเรียก ส่วนโค้งที่ยาวกว่าว่า ส่วนโค้งใหญ่ (major arc)

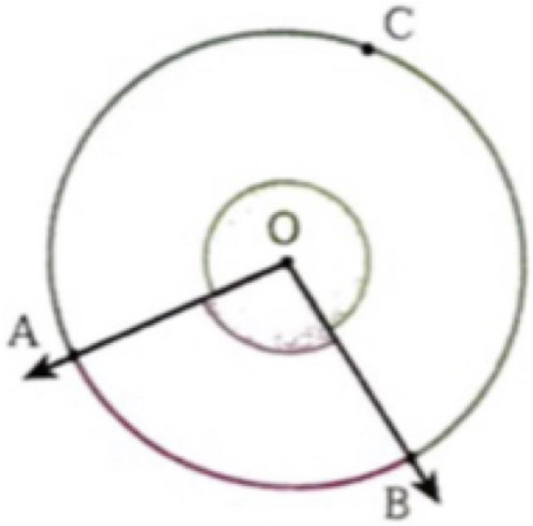
และเรียก ส่วนโค้งที่สั้นกว่าว่า ส่วนโค้งน้อย (minor arc)

จากรูป เรียกส่วนโค้ง ACB ว่า ส่วนโค้งใหญ่ AB เขียนแทน ส่วนโค้งใหญ่ AB ด้วย $\widehat{ACB}$

เรียกส่วนโค้ง ADB ว่า ส่วนโค้งน้อย AB เขียนแทน ส่วนโค้งน้อย AB ด้วย $\widehat{ADB}$

ในที่นี้ เมื่อกล่าวถึง ส่วนโค้ง AB จะหมายถึงส่วนโค้งน้อย AB และเขียนแทนด้วย AB

* มุมที่จุดศูนย์กลาง (Central angle) คือ มุมที่มีจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นจุดยอดมุม และแขนทั้งสองของมุมตัดวงกลม

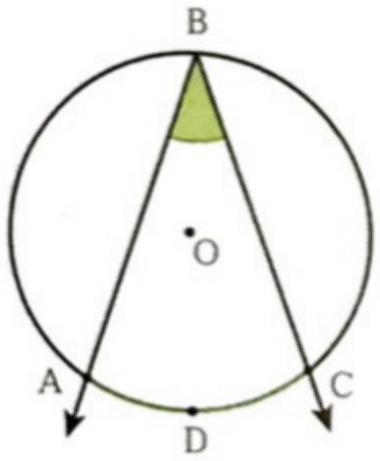


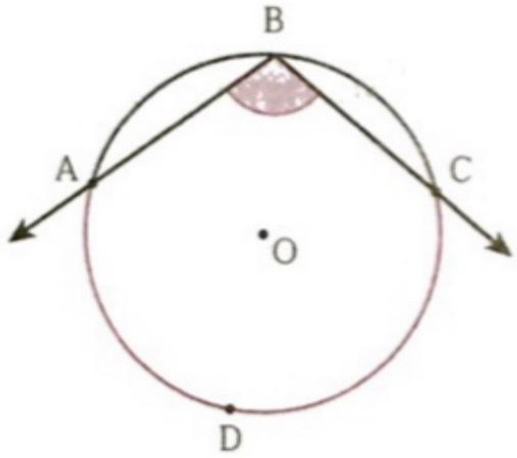
จากรูป $A\hat{O}B$ และมุมกลับ AOB เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม 0

ซึ่ง $A\hat{O}B$ รองรับด้วยส่วนโค้ง AB

และ มุมกลับ AOB รองรับด้วยส่วนโค้ง ACB

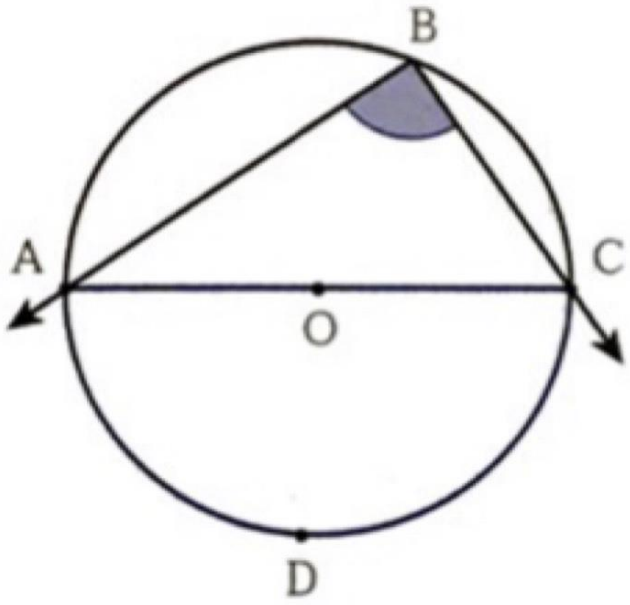
* มุมในส่วนโค้งของวงกลม (inscribed angle) คือ มุมที่มีจุดยอดมุมอยู่บนวงกลม และแขนทั้งสองของมุมตัดวงกลม





จากรูป $A\hat{B}C$ เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลม 0 ที่รองรับด้วย $\widehat{ADC}$

ในกรณีที่มุมในส่วนโค้งของวงกลมมีแขนทั้งสองของมุมผ่านจุดปลายทั้งสองของเส้นผ่านศูนย์กลาง จะเรียกมุมในส่วนโค้งของวงกลมนั้นว่า มุมในครึ่งวงกลม (angle inscribed in a semicircle)



จากรูป $\overline{AC}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม 0

และ $A\hat{B}C$ เป็นมุมในครึ่งวงกลมที่รองรับด้วย $\widehat{ADC}$

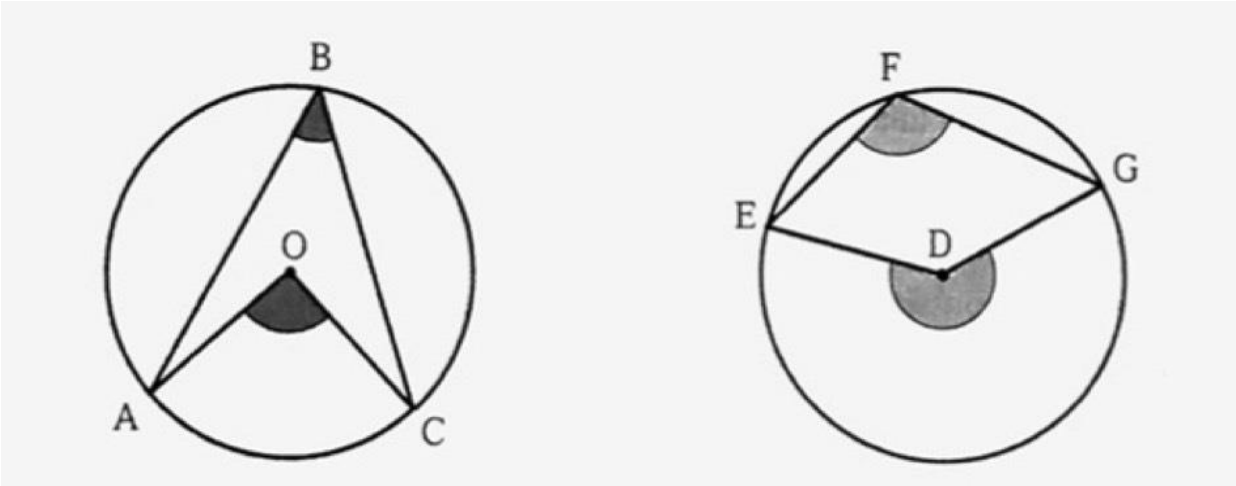
ความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางกับความยาวของส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางเป็นไปตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมวงเดียวกัน ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากันแล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้นจะยาวเท่ากัน

ทฤษฎีบท ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมวงเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากันแล้วมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน

มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม

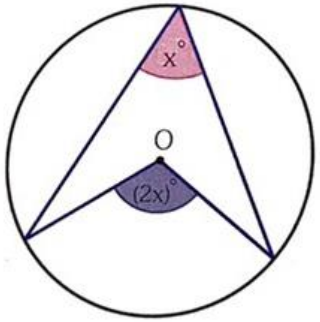
มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน มีลักษณะดังรูป

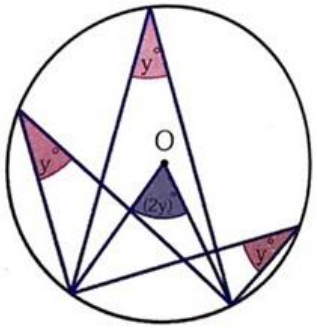


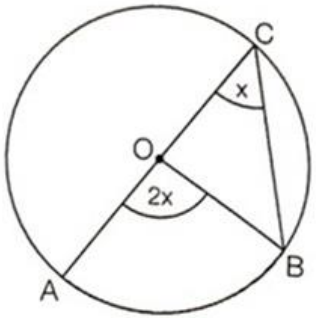
จากวงกลม O AOC และ ABC ต่างรองรับด้วยส่วนโค้ง AC

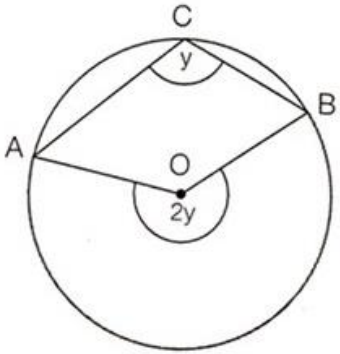
และ จากวงกลม D มุมกลับ EDG และ EFG ต่างรองรับด้วยส่วนโค้งใหญ่ EG

ทฤษฎีบท ในวงกลมวงเดียวกัน มุมที่จุดศูนย์กลางจะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน



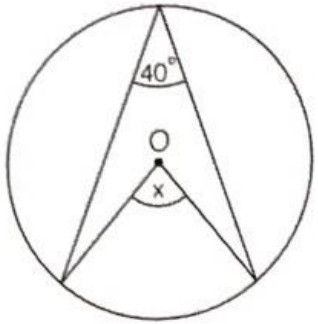




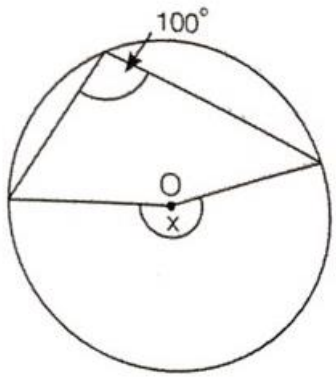


Example What is the size of an unknown angle?

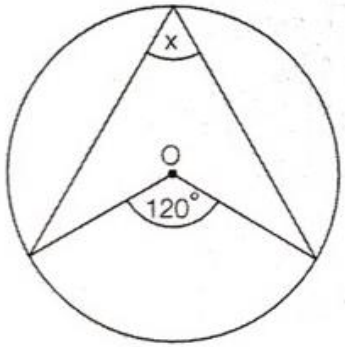
1.



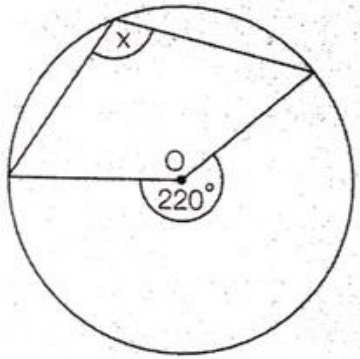
2.



3.

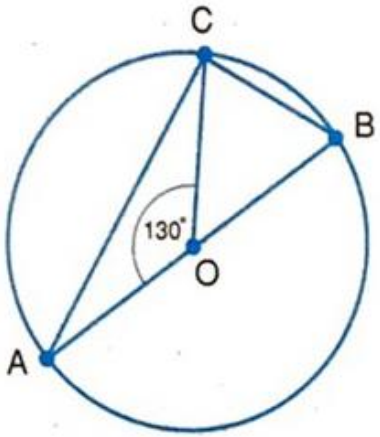


4.

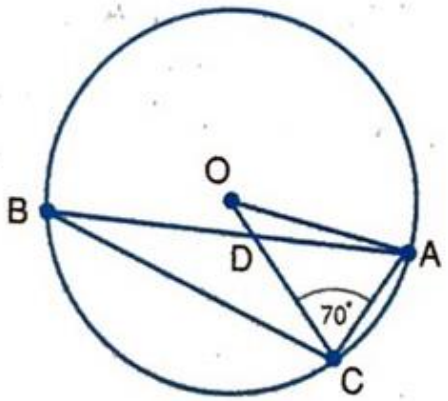


ตัวอย่าง จากรูปจงหาขนาดของ $A\hat{B}C$ บนวงกลมที่มีจุด O เป็นจุดศูนย์กลาง

1.

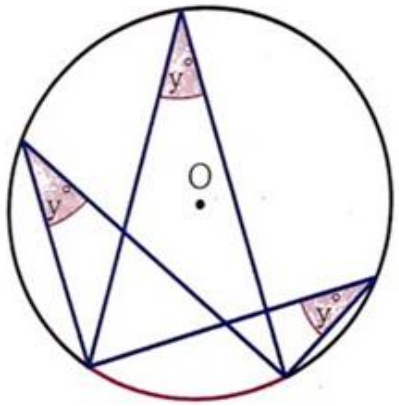


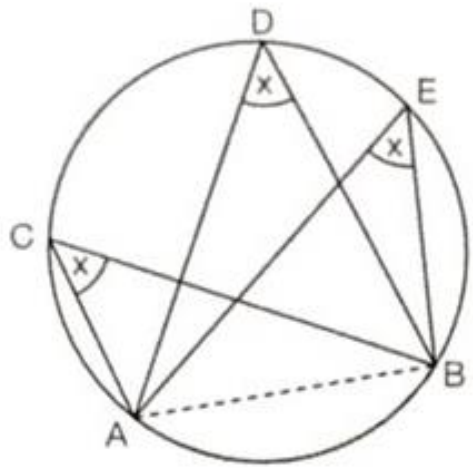
2.



มุมในส่วนโค้งของวงกลมและส่วนโค้งที่รองรับมุม

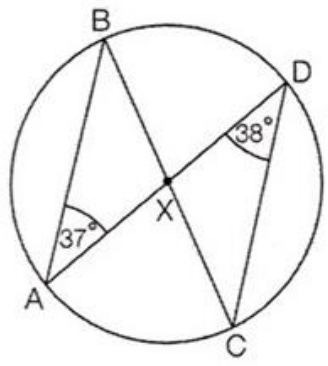
ทฤษฎีบท ในวงกลมวงเดียวกัน มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน จะมีขนาดเท่ากัน



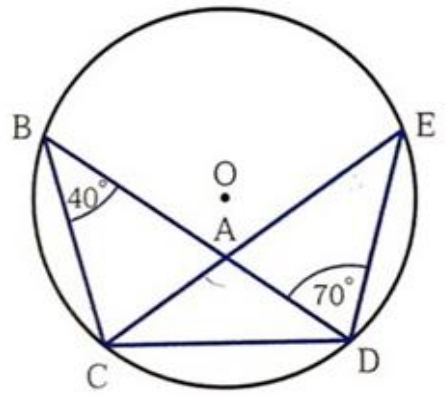


Example In the figure below, chord $\overline{AD}$ intersects chord $\overline{CB}$ at point X. Given that

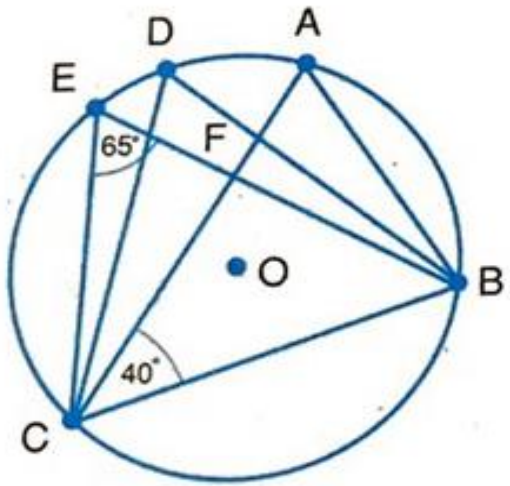
$B\hat{A}D = 37°$ and $A\hat{D}C = 38°$, What is the size of $C\hat{X}D$?

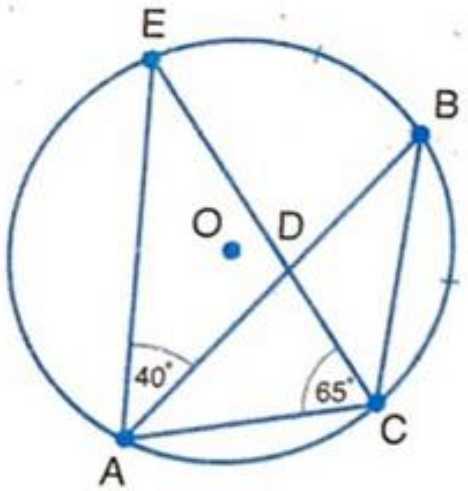


ตัวอย่าง จากวงกลม O ที่กำหนดให้ จงหาขนาดของ $C\hat{A}D$



ตัวอย่าง จากรูปจงหาขนาดของ $A\hat{B}C$ บนวงกลมที่มีจุด O เป็นจุดศูนย์กลาง



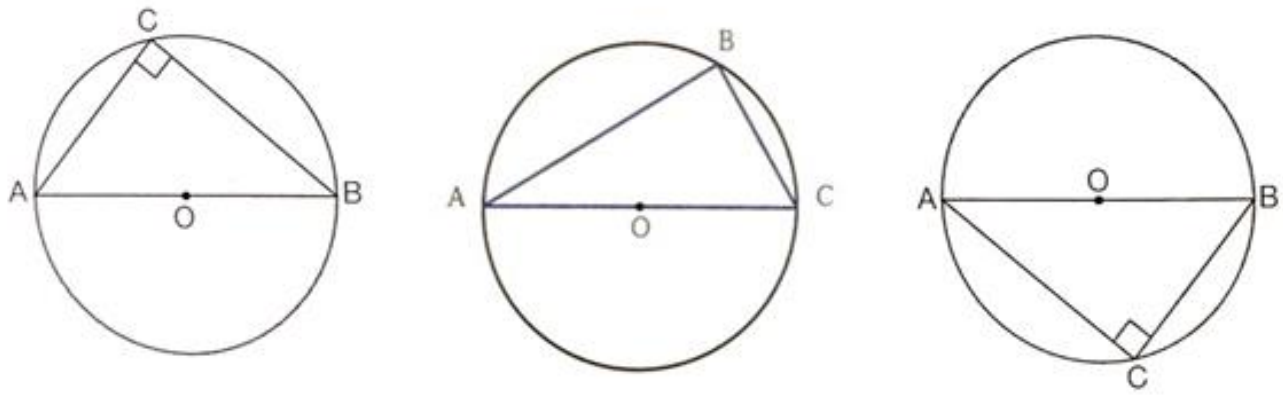


Workbook 2 ทำ EXERCISE 2 (p.250-252) ทำข้อ 1-6 , 11 , 12 , 13 , 14

สสวท.เล่ม 2 ทำแบบฝึกหัด 2.1ก หน้า 62 ข้อ 1-3 ใหญ่ ลงหนังสือ

มุมในครึ่งวงกลม

มุมในครึ่งวงกลมเป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลมแบบหนึ่ง ที่มีความยาวของส่วนโค้งที่รองรับมุมนั้นเป็นครึ่งหนึ่งความยาวของเส้นรอบวงเสมอ

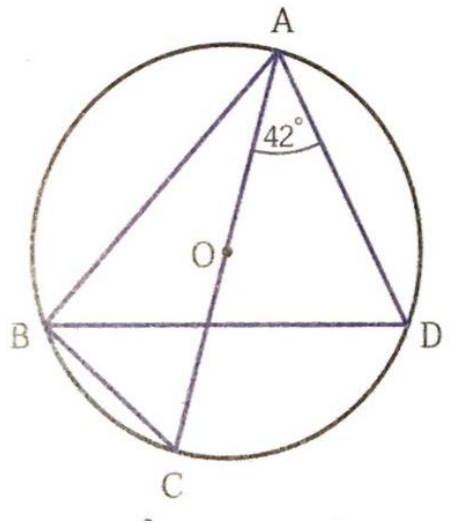


จากทฤษฎีบทเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างมุมในส่วนโค้งของวงกลมมุมที่จุดศูนย์กลางจึงได้ว่า

ABC มีขนาดเท่ากับ 90° ซึ่งสามารถสรุปเป็นทฤษฎีบท ดังนี้

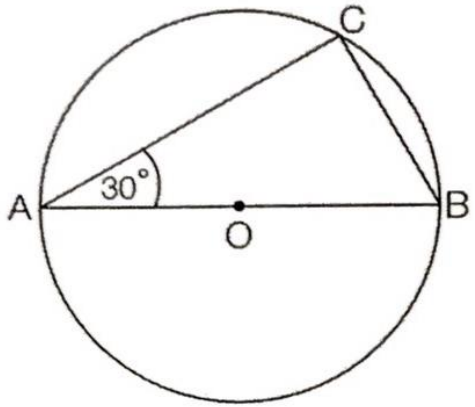
ทฤษฎีบท มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90 องศาหรือหนึ่งมุมฉาก

ตัวอย่าง จากรูป $\overline{AC}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม 0 และ $C\hat{A}D = 42^\circ$ จงหาขนาดของ $A\hat{B}D$



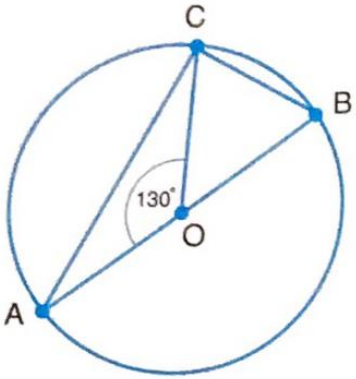
Example Given that point O is the centre of the circle and $\overline{AB}$ is a diameter of u circle.

What is the size of $A\widehat{B}C$?

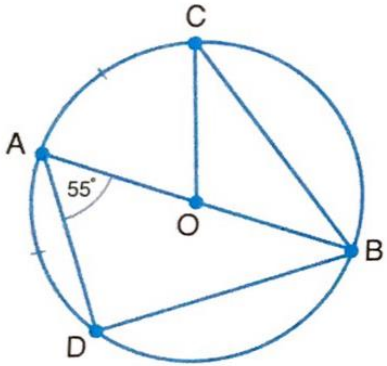


ตัวอย่าง จากรูปจงหาขนาดของ $A\hat{B}C$ บนวงกลมที่มีจุด O เป็นจุดศูนย์กลาง

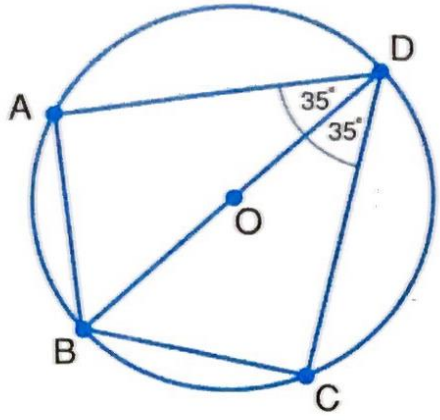
1.



2.

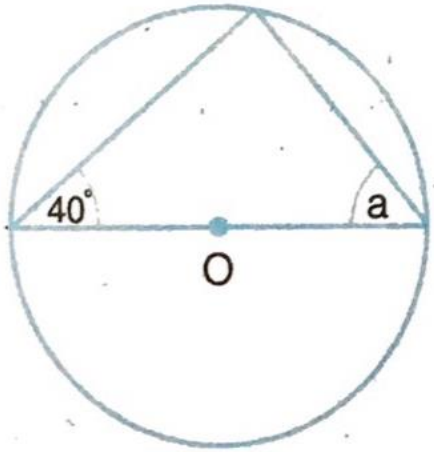


ตัวอย่าง จากรูป จงหาขนาดของ $C\hat{B}D$

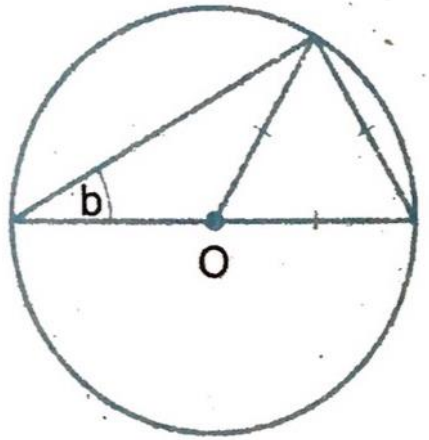


ตัวอย่าง ให้หาขนาดของมุมที่ไม่ทราบค่าของวงกลม O ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1.



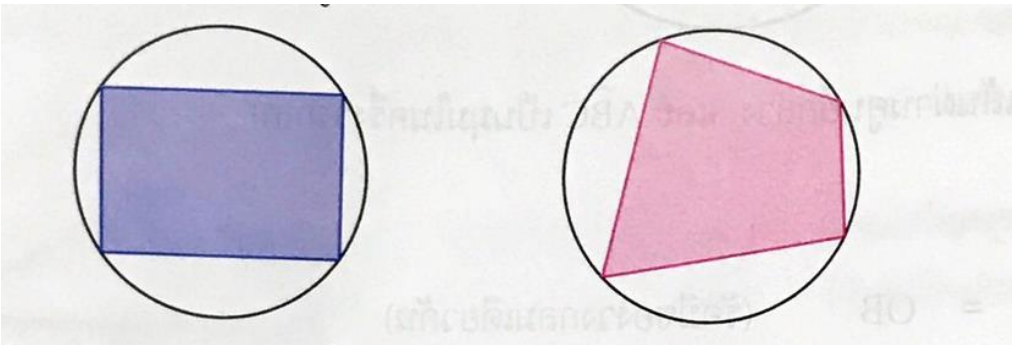
2.

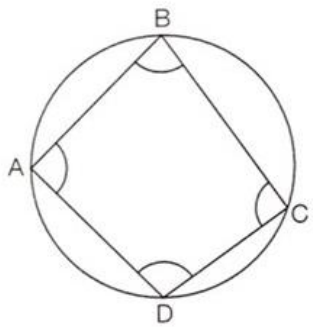


รูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม

รูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลมรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม (inscribed quadrilateralofacircle) หรือรูปสี่เหลี่ยมวงกลมล้อม (cyclic quadrilateral) คือรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ที่อยู่ภายในวงกลม โดยที่จุดยอดทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยมนั้นอยู่บนวงกลม

รูปต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม

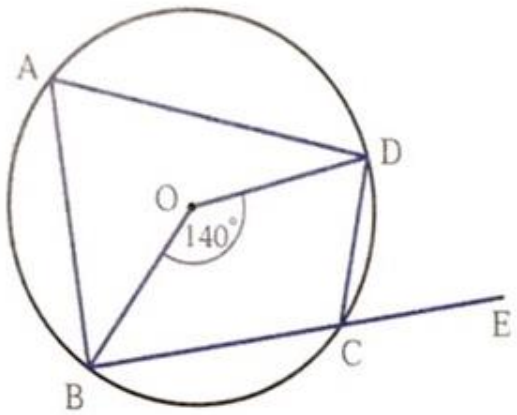




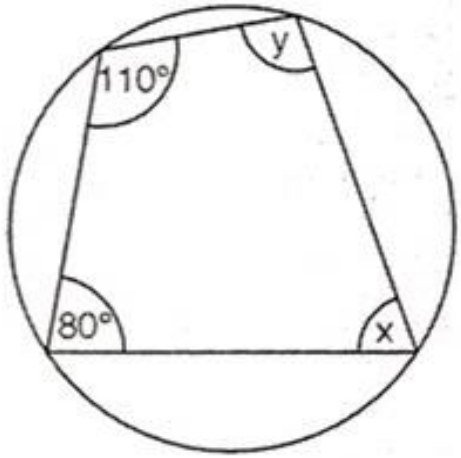
ทฤษฎีบท ถ้ารูปสี่เหลี่ยมใด ๆ เป็นรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม แล้วผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามจะเท่ากับสองมุมฉาก

ตัวอย่าง จากรูป สี่เหลี่ยม ABCD เป็นสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม O และ $B\hat{O}D = 140^{\circ}$

จงหาขนาดของ $D\hat{C}E$



Example From the figure, what are the sizes of unknown angles?



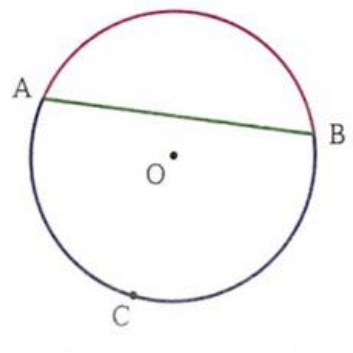
Workbook 2 ทำ EXERCISE 2 (p.251-252) ทำข้อ 7-10 และ 15-18

สสวท.เล่ม 2 ทำแบบฝึกหัด 2.1ข หน้า 69-70 ข้อ 1,2,3,4 และ 6 ใหญ่ ลงหนังสือ

2.2 คอร์ดของวงกลม

คอร์ด (chord) คือ ส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายทั้งสองอยู่บนวงกลมเดียวกัน

คอร์ดแต่ละเส้นจะแบ่งวงกลมออกเป็นส่วนโค้ง 2 ส่วน



จากรูป $\overline{AB}$ เป็นคอร์ดของวงกลม 0 ซึ่งแบ่งวงกลมออกเป็นส่วนโค้ง 2 ส่วนคือส่วนโค้งใหญ่ ACB และส่วนโค้งน้อย AB

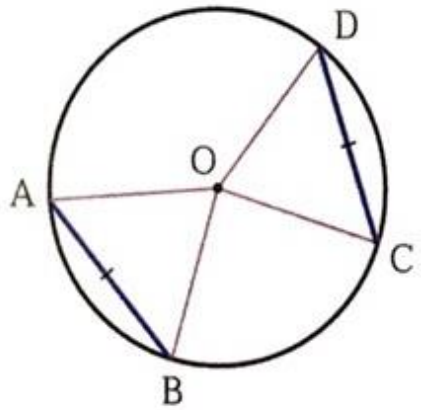
ความยาวของ $\widehat{ACB}$ เขียนแทนด้วย m($\widehat{ACB}$)

ความยาวของ $\widehat{AB}$ เขียนแทนด้วย m($\widehat{AB}$)

คอร์ดและส่วนโค้งของวงกลม

ทฤษฎีบท ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมวงเดียวกันถ้าคอร์ดสองเส้นยาวเท่ากันแล้วคอร์ดทั้งสองจะตัดวงกลมทำให้ส่วนโค้งน้อยยาวเท่ากันและส่วนโค้งใหญ่ยาวเท่ากัน

ทฤษฎีบท ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมวงเดียวกันถ้าคอร์ดสองเส้นตัดวงกลมทำให้ส่วนโค้งน้อยยาวเท่ากันแล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน



จากรูป วงกลม O มี $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ เป็นคอร์ด โดยที่ $AB = CD$
เมื่อลากรัศมี OA, OB, OC และ OD จะได้ $\Delta AOB \cong \Delta COD$ แบบ ด.ด.ด.
ดังนั้น $A\hat{O}B = C\hat{O}D$

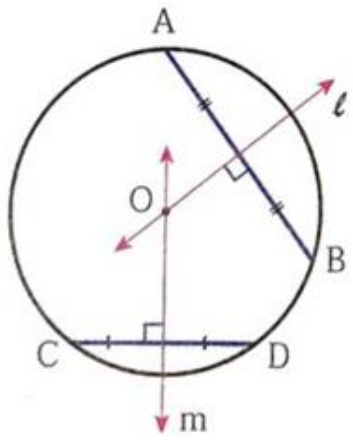
คอร์ดและจุดศูนย์กลางของวงกลม

ทฤษฎีบท ส่วนของเส้นตรงซึ่งผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมและตัดกับคอร์ดที่ไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลางจะมีสมบัติดังนี้

1) ถ้าส่วนของเส้นตรงแบ่งครึ่งคอร์ดแล้วส่วนของเส้นตรงนั้นจะตั้งฉากกับคอร์ด

2) ถ้าส่วนของเส้นตรงตั้งฉากกับคอร์ดแล้วส่วนของเส้นตรงนั้นจะแบ่งครึ่งคอร์ด

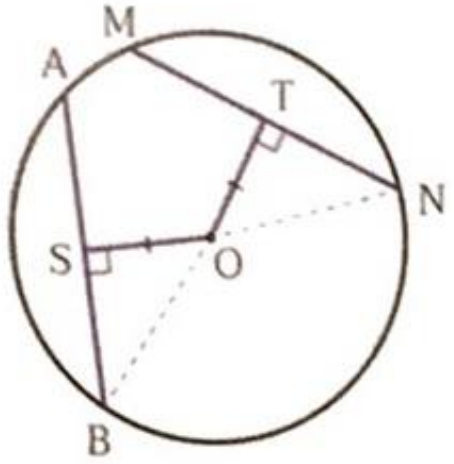
ทฤษฎีบท เส้นตรงที่ตั้งฉากและแบ่งครึ่งคอร์ดของวงกลมจะผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมนั้น



คอร์ดที่ยาวเท่ากัน

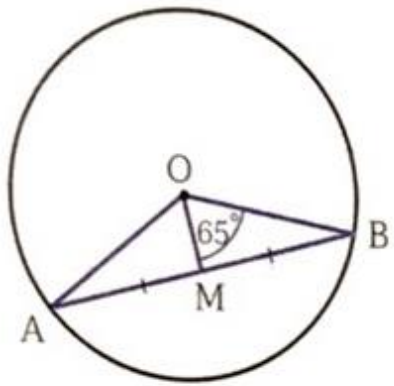
ทฤษฎีบท ในวงกลมวงเดียวกัน ถ้าคอร์ดสองเส้นยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางเป็นระยะเท่ากัน

ทฤษฎีบท ในวงกลมวงเดียวกัน ถ้าคอร์ดสองเส้นอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางเป็นระยะเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน

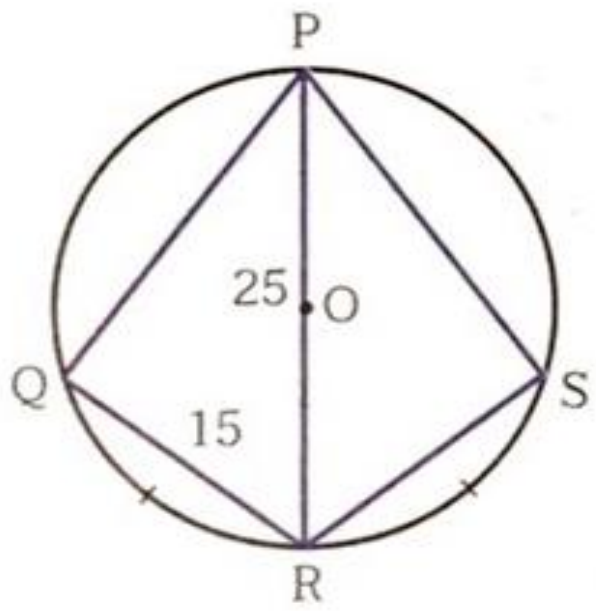


ตัวอย่าง จากรูปกำหนดให้ $\overline{AB}$ เป็นคอร์ดของวงกลม 0 มี AM = BM และ $B\hat{O}M = 65^\circ$ จงหา

ขนาดของ $O\hat{A}M$

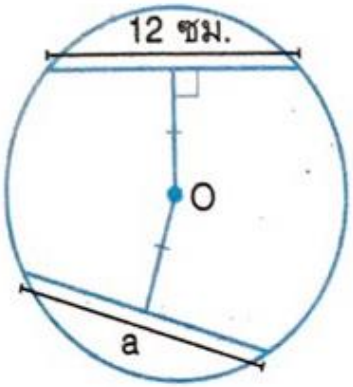


ตัวอย่าง จากรูปกำหนดให้ $\overline{PR}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม 0 มี m($\widehat{RS}$) = m($\widehat{QR}$), PR = 25 หน่วยและ QR = 15 หน่วย จงหาความยาวของ $\overline{PS}$

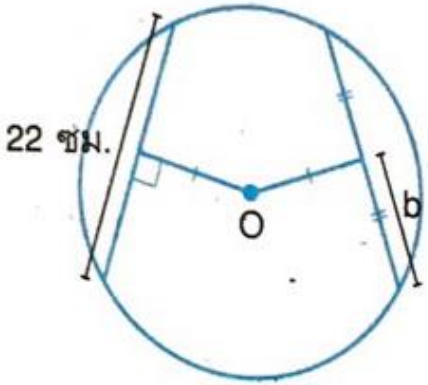


ตัวอย่าง ให้หาความยาวด้านหรือขนาดของมุมที่ไม่ทราบค่าจากรูปที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

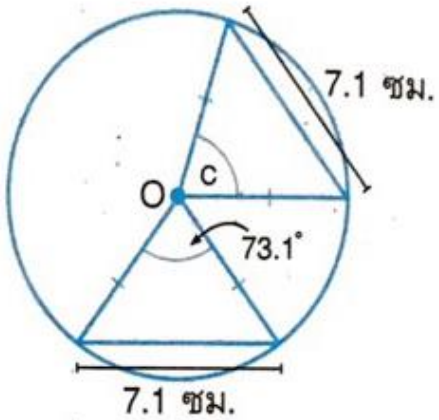
1)



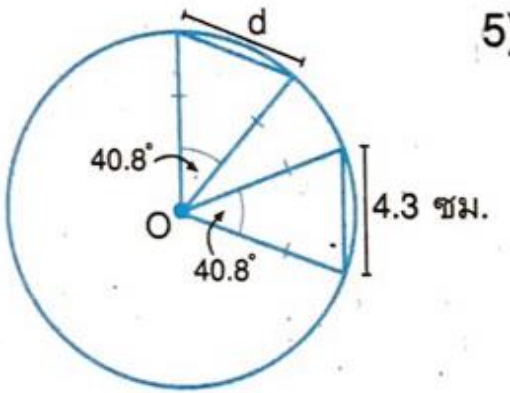
2)



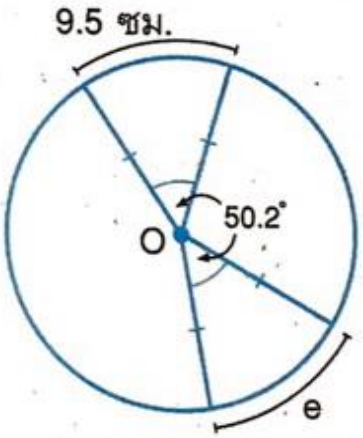
3)



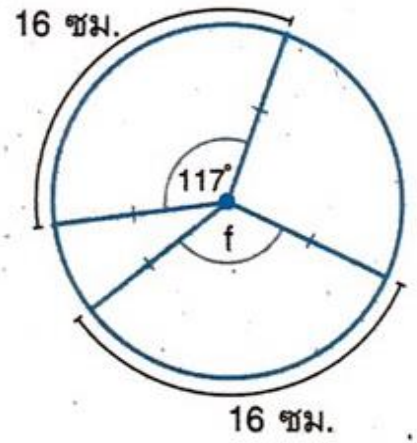
4)



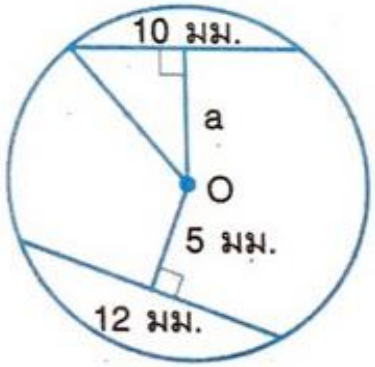
5)



6)



ตัวอย่าง ให้หาค่าของ a จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้

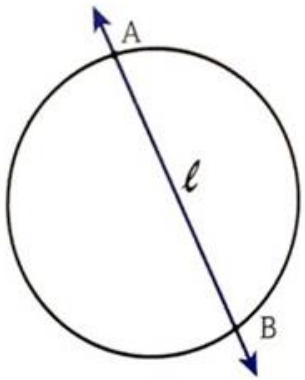


Workbook 2 ทำ EXERCISE 1 (p.242 - 243) ทำข้อ 1 – 3 ใหญ่

สสวท.เล่ม 2 ทำแบบฝึกหัด 2.2 หน้า 80-81 ข้อ 1ใหญ่ ทำข้อ 1 - 4 และ 2 ใหญ่ ลงหนังสือ

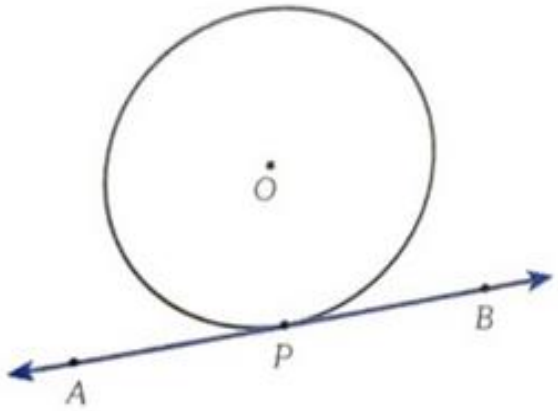
2.3 เส้นสัมผัสวงกลม

เส้นตัด (secant line) หรือเส้นตัดวงกลม คือ เส้นตรงที่ตัดวงกลม 2 จุด



จากรูป เส้นตรง l เป็นเส้นตัดวงกลม ที่ตัดวงกลมที่จุด A และจุด B

เส้นสัมผัสวงกลม คือ เส้นตรงที่ตัดวงกลมเพียงจุดเดียวเท่านั้น และเรียกจุดตัดนั้นว่า จุดสัมผัส



จากรูป

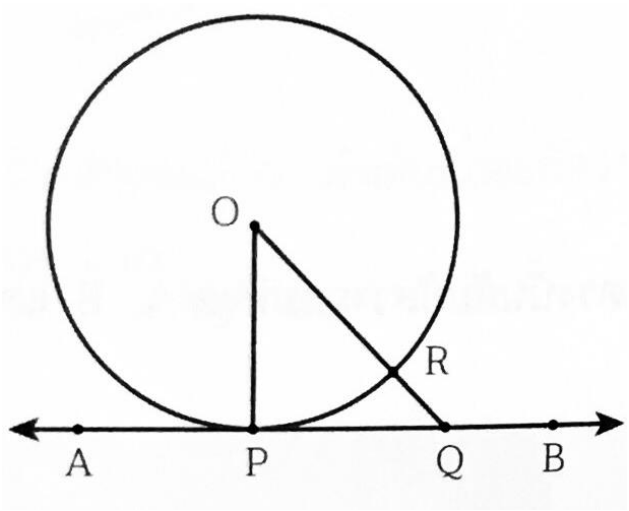
$\overleftrightarrow{AB}$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม โดยสัมผัสวงกลม O ที่จุด P

อาจกล่าวได้ว่า ส่วนหนึ่งส่วนใดของ $\overleftrightarrow{AB}$ ที่ผ่านจุด P เช่น $\overline{AB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PA}$ หรือ $\overrightarrow{PB}$ สัมผัสวงกลม O ที่จุด P

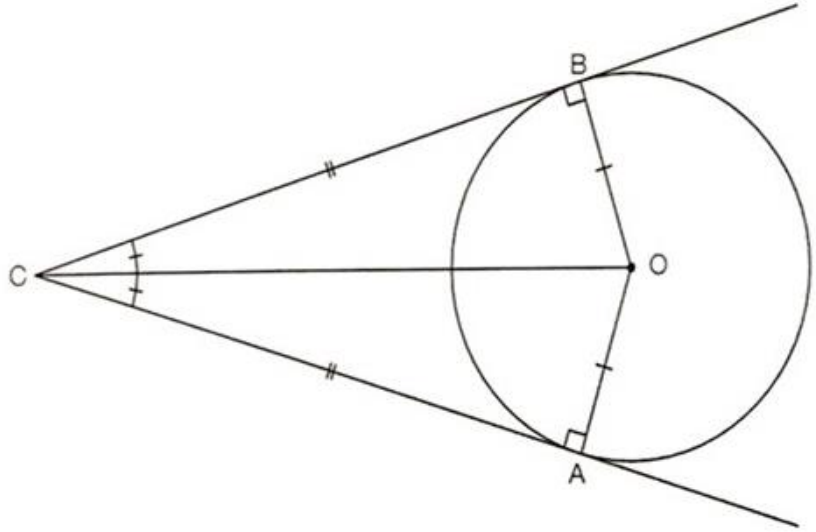
เส้นสัมผัสวงกลมและรัศมี

ทฤษฎีบท เส้นสัมผัสวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส

ทฤษฎีบท เส้นตรงที่ตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดจุดหนึ่งบนวงกลมจะเป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่จุดนั้น

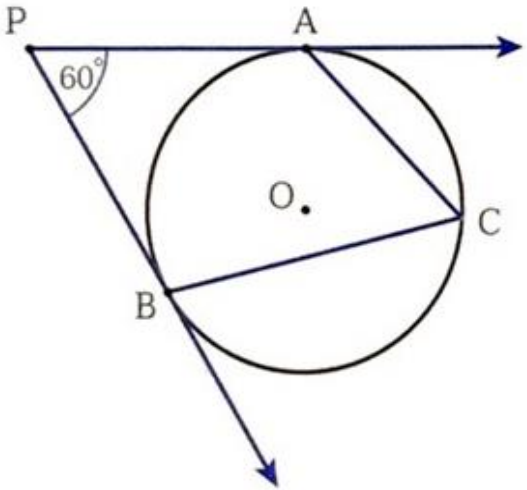


ทฤษฎีบท ส่วนของเส้นตรง 2 เส้น ที่ลากจากจุดจุดหนึ่งภายนอกวงกลมมาสัมผัสวงกลมวงเดียวกันจะยาวเท่ากัน

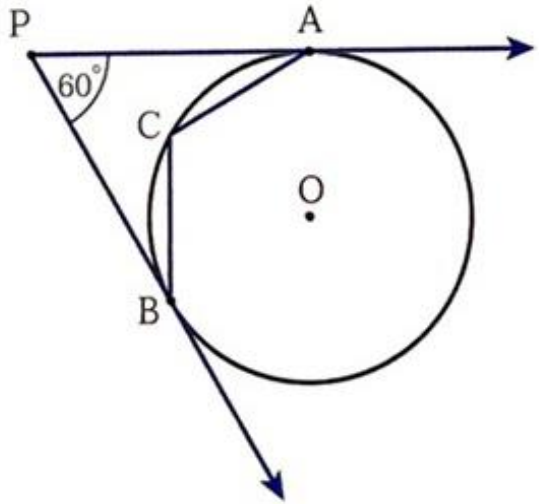


ตัวอย่าง กำหนดให้จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมมี $\overrightarrow{PA}$ และ $\overrightarrow{PB}$ สัมผัสวงกลมที่จุด A และจุด B ตามลำดับ และ $A\hat{C}B$ เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลม ดังรูป ถ้า $A\hat{P}B = 60^\circ$ จงหาขนาดของ $A\hat{C}B$

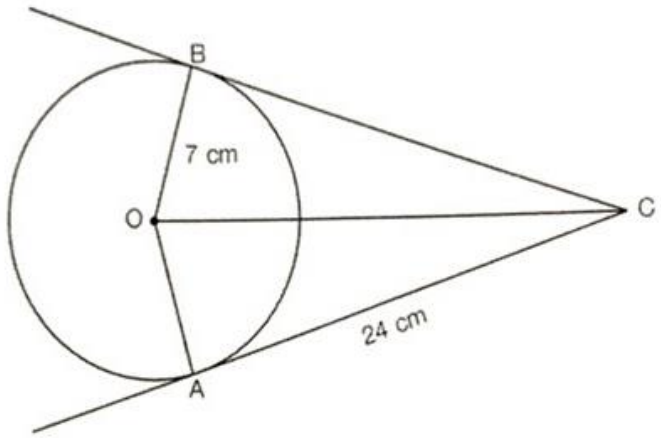
1.



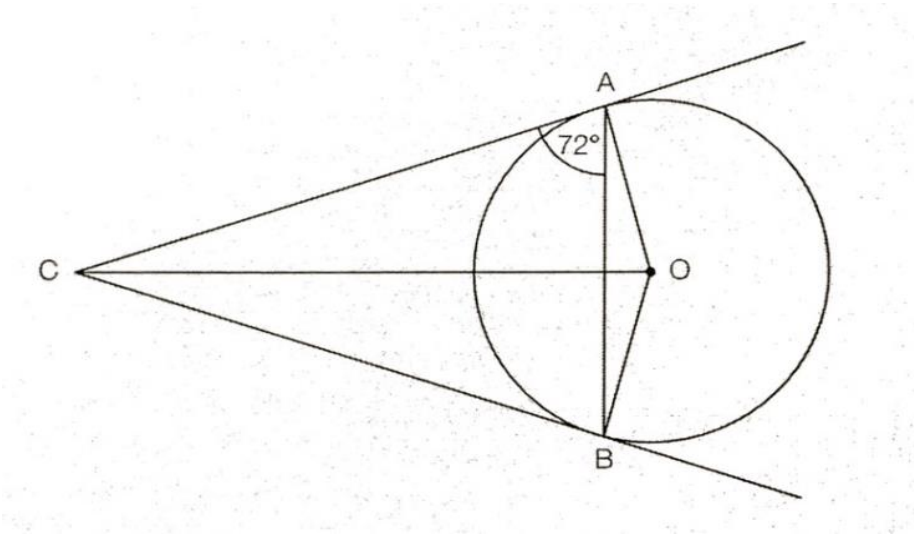
2.



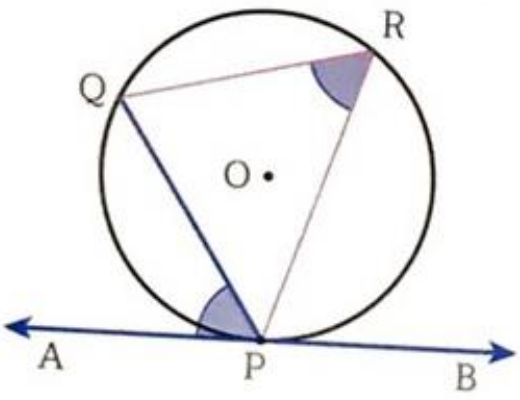
Example The tangents from an external point touch the circle at points A and B. The radius of the circle is 7 cm. and $\overline{AC}$ = 24 cm. Find the length of $\overline{OC}$.



Example Given that point o the centre of the circle. $\overline{CA}$ and $\overline{CB}$ are tangents to the circle, and $B\widehat{A}C = 72°$. What is the size of $A\widehat{O}C$?



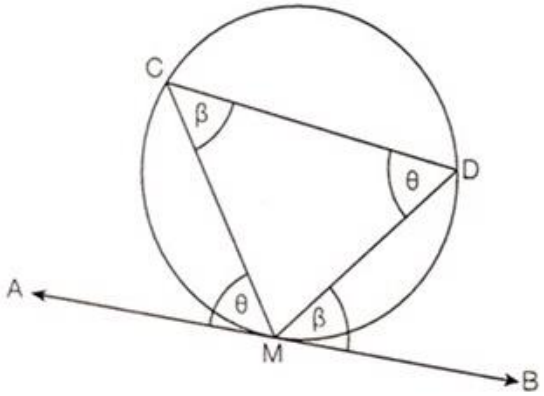
เส้นสัมผัสวงกลมและคอร์ดของวงกลม



จากรูปเมื่อพิจารณาคอร์ด PO

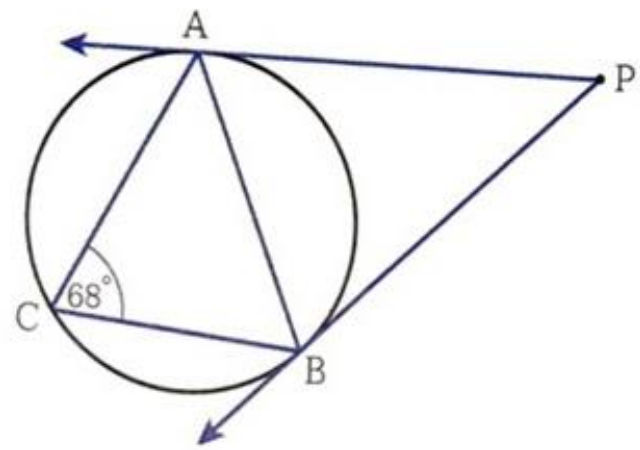
เรียก $A\hat{P}Q$ ว่ามุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสที่จุดสัมผัส P

ส่วนมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่คนละข้างกับมุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสที่จุดสัมผัสเช่น $P\hat{R}Q$ นั้นจะเรียกว่า มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ด PQ

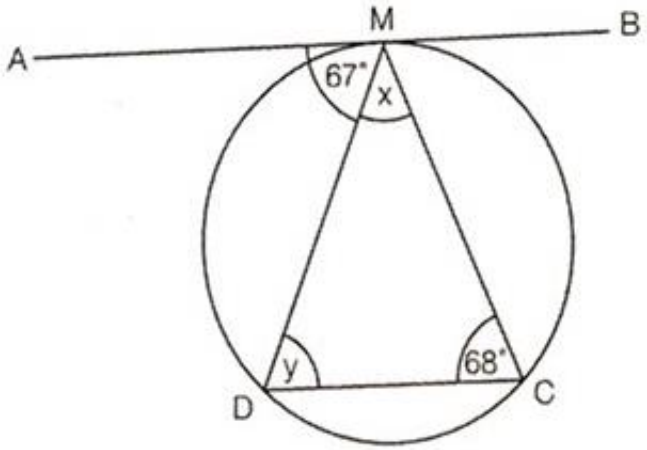


ทฤษฎีบท มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสวงกลมที่จุดสัมผัส จะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น

ตัวอย่าง จากรูป $\overrightarrow{PA}$ และ $\overrightarrow{PB}$ สัมผัสวงกลมที่จุด A และจุด B ตามลำดับ ถ้า $A\hat{C}B = 68$ แล้วจงหาขนาดของ $A\hat{P}B$



Example Find the sizes of the unknown angle.



สสวท.เล่ม 2 ทำแบบฝึกหัด 2.3 หน้า 97-100

ข้อ 1 ใหญ่ หน้า 97 ทำข้อ 1 – 2

ข้อ 2 ใหญ่ หน้า 98 ทำข้อ 1 – 2

ข้อ 3 – 8 ใหญ่ หน้า 99 - 100

เขียนคำตอบลงในหนังสือ