****

**แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2**

**หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 อันดับอนันต์และอนุกรมอนันต์ เรื่อง ลิมิตของลำดับ**

**วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 (ค33201) กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์**

**ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2560 เวลา 5 คาบ**

**ผู้สอน อาจารย์เกตุม สระบุรินทร์**

**ผลการเรียนรู้**

หาผลบวกของอนุกรมอนันต์ได้และนำความรู้เรื่องลำดับและอนุกรมไปใช้แก้ปัญหาได้

**จุดประสงค์การเรียนรู้**

หาผลบวกของอนุกรมอนันต์ได้และนำความรู้เรื่องลำดับและอนุกรมไปใช้แก้ปัญหาได้

**สาระสำคัญ**

อนุกรมอนันต์

**สาระการเรียนรู้**

**ด้านความรู้**

- ผลบวกของอนุกรมอนันต์ได้และนำความรู้เรื่องลำดับและอนุกรมไปใช้แก้ปัญหา

- ความสมเหตุสมผลของคำตอบจากการคำนวณและการแก้ปัญหาได้

**ด้านทักษะ/กระบวนการ**

- การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมาย การนำเสนอและการเชื่อมโยงหลักการความรู้ทางคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น

**ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์**

- มีระเบียบเรียบร้อย รอบคอบ และมีความเชื่อมั่นในตนเอง

**ด้านสมรรถนะ**

- ความสามารถในการสื่อสาร

- ความสามารถในการคิด

- ความสามารถในการแก้ปัญหา

**กิจกรรมการเรียนรู้**

**กิจกรรมนำเข้าสู่บทเรียน**

อาจารย์ทบทวนการหาลิมิตของลำดับอนันต์และให้แนวคิดในการหาค่าลิมิตโดยวิธีลัด ดังนี้

**ขั้นที่ 1** ทำตัวเศษและตัวส่วนในพจน์ที่ n ให้มีตัวแปรกำลังสูงสุดเท่ากัน

**ขั้นที่ 2** หาค่าลิมิตโดยนำสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีกำลังสูงสุดของตัวเศษ หารด้วยสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีกำลังสูงสุดของตัวส่วน

สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีกำลังสูงสุดของตัวเศษ

สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีกำลังสูงสุดของตัวส่วน

จะได้ ค่าลิมิต =

เช่น 1) an = 

จะได้ว่า พจน์ของตัวเศษที่มีกำลังสูงสุดคือ 3n2

พจน์ของตัวส่วนที่มีกำลังสูงสุดคือ 4n2

ดังนั้น lim an = lim  = 

n → ∞

n → ∞

2) an = 

เนื่องจาก  = 

จะได้ว่า พจน์ของตัวเศษที่มีกำลังสูงสุดคือ 0n2

พจน์ของตัวส่วนที่มีกำลังสูงสุดคือ 2n2

ดังนั้น lim  = lim  =  = 0

n → ∞

n → ∞

3) an = 

เนื่องจาก  = 

จะได้ว่า พจน์ของตัวเศษที่มีกำลังสูงสุดคือ n2

พจน์ของตัวส่วนที่มีกำลังสูงสุดคือ 0n2

ดังนั้น lim  = lim  =  หาค่าไม่ได้

n → ∞

n → ∞

**กิจกรรมพัฒนาผู้เรียน**

1. อาจารย์นำเสนอตัวอย่างการหาลิมิตของลำดับโดยวิธีลัดเพิ่มเติมกรณีที่ลำดับ an อยู่ในรูปกรณฑ์ที่สอง

1) an = 

เนื่องจาก  = 

 = 

(กำลังสูงสุดของตัวเศษและตัวส่วนคือ กำลัง 1)

ดังนั้น lim  = lim  =  = 0

n → ∞

n → ∞

2) an = 

เนื่องจาก  = 

กำลังสูงสุดของตัวเศษคือกำลังของ  หรือกำลัง 1 และสัมประสิทธิ์ของพจน์กำลังสูงสุดของตัวเศษคือ  หรือ 

ดังนั้น lim  =  = 

n → ∞

2. อาจารย์อธิบายเรื่องอนุกรม โดยเขียนบทนิยามต่อไปนี้บนกระดาน

**บทนิยาม** 1. เมื่อ a1, a2, a3, …, an เป็นลำดับจำกัด เรียกผลบวกของทุกพจน์ของลำดับในรูป a1+ a2+ a3+ … + an ว่า อนุกรมจำกัด

2. เมื่อ a1, a2, a3, …, an, … เป็นลำดับอนันต์ เรียกผลบวกของทุกพจน์ของลำดับในรูป a1+ a2+ a3+ … + an+ … ว่า อนุกรมอนันต์

เช่น 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 เป็นอนุกรมจำกัดที่ได้จากลำดับจำกัด   
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16

2 + 4 + 6 + ... + 2n + … เป็นอนุกรมอนันต์ที่ได้จากลำดับอนันต์  
2, 4, 6, ..., 2n, …

3. อาจารย์อธิบายสูตรที่ใช้หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม ดังนี้

1) ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

Sn = [2a1+(n−1)d]

หรือ Sn = [a1+ an]

2) ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต

Sn =  , r ≠ 1 เหมาะสำหรับ |r| > 1

หรือ Sn =  , r ≠ 1 เหมาะสำหรับ |r| < 1

จากนั้น ให้นักเรียนอ่านบทนิยามในหนังสือเรียนต่อไปนี้

**บทนิยาม** กำหนด a1+ a2+ a3+ … + an+ … เป็นอนุกรมอนันต์

ให้ S1 = a1

S2 = a1+ a2



Sn = a1+ a2+ a3+ … + an

เรียก Sn ว่า **ผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรม** เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

เรียกลำดับอนันต์ S1, S2, S3, ..., Sn, ... ว่า **ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม  
(a sequence of partial sums)**

4. อาจารย์อธิบายตัวอย่างที่ 1 และตัวอย่างที่ 2 ในหนังสือเรียน โดยให้นักเรียนตอบคำถาม  
ต่อไปนี้ก่อนแสดงวิธีทำ

**ตัวอย่างที่ 1** 1) อนุกรม 4+7 +10+…+(3n+1)+… เป็นอนุกรมชนิดใด

(อนุกรมเลขคณิต เนื่องจาก 4+7+10+…+(3n+1)+… เป็นอนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิต 4, 7, 10, …, (3n+1), …)

2) ให้นักเรียนบอกค่า a1 และ d

(a1 = 4 d = 7−4 = 10−7 = … = 3)

3) ใช้สูตรใดมาช่วยในการคำนวณหาลำดับผลบวกย่อยของอนุกรม

(ใช้สูตร Sn = [2a1+(n−1)d] )

**ตัวอย่างที่ 2** 1) อนุกรม +++ ... ++ ... เป็นอนุกรมชนิดใด

(เป็นอนุกรมเรขาคณิต เนื่องจาก +++ ... ++ ... เป็นอนุกรมที่ได้จากลำดับเรขาคณิต , , , ..., , ...)

2) ให้นักเรียนบอกค่า a1 และ r

(a1 =  r = ÷ = ÷ = … = )

3) ใช้สูตรใดมาช่วยในการหาลำดับผลบวกย่อยของอนุกรม

(ใช้สูตร Sn =  เนื่องจาก |r| =  =  น้อยกว่า 1)

5. ให้นักเรียนอ่านบทนิยามในหนังสือเรียนต่อไปนี้

**บทนิยาม** กำหนดอนุกรมอนันต์ a1+ a2+ a3+ … + an+ ... ให้ S1, S2, S3, …, Sn, … เป็นลำดับผลบวกย่อยของอนุกรมนี้ ถ้าลำดับ Sn เป็นลำดับลู่เข้า และ   
lim Sn = S เมื่อ S เป็นจำนวนจริง แล้วอนุกรม a1+ a2+ a3+…+ an+ ...   
**เป็นอนุกรมลู่เข้า (convergent series)** เรียก S ว่า ผลบวกของอนุกรม   
ถ้าลำดับ Sn เป็นลำดับลู่ออก แล้วอนุกรม a1+ a2+ a3+ … + an+ ... **เป็นอนุกรมลู่ออก (divergent series)**

n → ∞

จากบทนิยาม อาจารย์อธิบายเสริมว่าอนุกรมจำกัดทุกอนุกรมหาผลบวกได้เสมอ แต่สำหรับอนุกรมอนันต์จะมีทั้งอนุกรมที่หาผลบวกได้และอนุกรมที่หาผลบวกไม่ได้

อนุกรมอนันต์ที่หาผลบวกได้ เรียกว่า อนุกรมลู่เข้า

อนุกรมอนันต์ที่หาผลบวกไม่ได้ เรียกว่า อนุกรมลู่ออก

อาจารย์เขียนบทนิยามต่อไปนี้เพิ่มเติมบนกระดาน

**บทนิยาม** ผลบวกของอนุกรมอนันต์ใด คือลิมิตของผลบวกย่อยตัวที่ n เมื่อ n เข้าสู่ค่าอนันต์ ใช้สัญลักษณ์ lim Sn = S

n → ∞

**บทนิยาม** ให้ a1+ a2+ a3+ … + an+ ... เป็นอนุกรมอนันต์ใดๆ

1) อนุกรม a1+ a2+ a3+ … + an+ ... เรียกว่า อนุกรมลู่เข้า

ก็ต่อเมื่อ lim Sn หาค่าได้

n → ∞

2) อนุกรม a1+ a2+ a3+ … + an+ ... เรียกว่า อนุกรมลู่ออก

ก็ต่อเมื่อ lim Sn หาค่าไม่ได้

n → ∞

6. อาจารย์ยกตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง** จงพิจารณาว่าอนุกรม + + + ... +  + ... เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก ถ้าลู่เข้า จงหาผลบวกของอนุกรม

\*จากตัวอย่าง อาจารย์ให้หลักในการตรวจสอบว่า อนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก ดังนี้

**ขั้นที่ 1**  หา Sn

**ขั้นที่ 2**  หา lim Sn

n → ∞

**ขั้นที่ 3**  ถ้า lim Sn หาค่าได้ แสดงว่า อนุกรมอนันต์ลู่เข้า

n → ∞

ถ้า lim Sn หาค่าไม่ได้ แสดงว่า อนุกรมอนันต์ลู่ออก

n → ∞

แสดงวิธีทำได้ดังนี้

**วิธีทำ ขั้นที่ 1** อนุกรมที่กำหนดให้ได้จากลำดับเรขาคณิต , , , ... , , ... มี a1 =  และ r = 

หาผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรมได้ดังนี้

Sn = 

= 

= 

**ขั้นที่ 2** หา lim Sn

n → ∞

lim Sn = lim 

n → ∞

n → ∞

=  lim 

n → ∞

= 

**ขั้นที่ 3** เนื่องจาก lim Sn หาค่าได้

n → ∞

ดังนั้น อนุกรมอนันต์ที่กำหนดให้เป็นอนุกรมลู่เข้า และมีผลบวกเท่ากับ 

\*อาจารย์ให้คำแนะนำเพิ่มเติมว่า เรามีวิธีตรวจสอบว่าอนุกรมเรขาคณิตลู่เข้าหรือลู่ออก โดยวิธีลัดจากทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท**  ให้อนุกรมเรขาคณิตมีพจน์แรกเป็น a1 และ r เป็นอัตราส่วนร่วม

ถ้า |r| < 1 แล้วอนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า และมี เป็นผลบวกของอนุกรม

ถ้า |r| ≥ 1 แล้วอนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่ออก

จากตัวอย่างข้างต้น |r| = < 1 ดังนั้น อนุกรมลู่เข้า

ผลบวกของอนุกรม =  =  = 

7. อาจารย์ยกตัวอย่างโจทย์ต่อไปนี้ ให้นักเรียนช่วยกันหาคำตอบ

1) ในการตรวจเสากองหนึ่งซึ่งวางเรียงกันเป็นชั้นๆ พบว่าเสาในแต่ละชั้นจะมีมากกว่าเสาในชั้นบนที่อยู่ติดกันเป็นจำนวน 3 ต้นเสมอ ถ้าชั้นบนสุดมีเสา 61 ต้น และ  
ชั้นล่างสุดซึ่งอยู่ติดกับพื้นดินมีเสา 379 ต้น จงหาว่าเสากองนี้วางซ้อนกันกี่ชั้น และมีเสาทั้งหมดกี่ต้น

**วิธีทำ** จำนวนเสาเรียงกันจากชั้นบนสุดคือ 61, 64, 67, ..., 379

อนุกรมคือ 61+64+67+...+379 เป็นอนุกรมเลขคณิต

หาจำนวนชั้น

จากสูตร an = a1+(n−1)d

an = 379, a1 = 61, d = 3

379 = 61+(n−1)3

379 = 61+3n−3

3n = 321

n = 107

ดังนั้น เสากองนี้มี 107 ชั้น

หาจำนวนเสาทั้งหมด

จากสูตร Sn = 

= 

= 

= 23,540

ดังนั้น เสากองนี้มีทั้งหมด 23,540 ต้น

2) เด็กคนหนึ่งเรียงลูกหินเป็นแถวๆ เพื่อประกอบเป็นรูปสามเหลี่ยม โดยจัดลูกหินในแถวบนให้น้อยกว่าลูกหินในแถวล่างที่อยู่ติดกันหนึ่งลูก ถ้าแถวบนสุดมีลูกหินอยู่เพียงหนึ่งลูก ซึ่งอยู่ในตำแหน่งของจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมด้วย ถ้ารูปสามเหลี่ยมนี้ประกอบด้วยลูกหินทั้งหมด 190 ลูก จงหาว่าฐานของรูปสามเหลี่ยมมีลูกหินกี่ลูก

**วิธีทำ** ลูกหินที่เรียงจากแถวบนสุดเขียนเป็นอนุกรมได้ดังนี้

1+2+3+... ซึ่งเป็นอนุกรมเลขคณิต

หา n

จากสูตร Sn = 

Sn = 190, a1 = 1, d = 1

190 = 

380 = n(2+n−1)

380 = n(n+1)

19 × 20 = n(n+1)

19(19+1) = n(n+1)

ดังนั้น n = 19

แถวล่างสุดคือแถวที่ 19

หาจำนวนลูกหินในแถวที่ 19

จากสูตร an = a1+(n−1)d

= 1+(19−1)(1)

= 1+18

= 19

ดังนั้น ฐานของรูปสามเหลี่ยมมีลูกหิน 19 ลูก

3) ลูกตุ้มนาฬิกาเรือนหนึ่งแกว่งเป็นเส้นโค้ง ครั้งแรกแกว่งได้ทาง 10 เซนติเมตร ครั้งต่อไปแกว่งได้ระยะทาง  ของระยะทางครั้งก่อนเสมอ จงหาระยะทางที่ลูกตุ้มของนาฬิกาเรือนนี้แกว่งตั้งแต่เริ่มแกว่งจนหยุด

**วิธีทำ**  ครั้งแรกลูกตุ้มแกว่งได้ทาง 10 เซนติเมตร

ครั้งที่สองลูกตุ้มแกว่งได้ทาง × 10 = 9 เซนติเมตร

ครั้งที่สามลูกตุ้มแกว่งได้ทาง × 9 = 8.1 เซนติเมตร

อนุกรมคือ 10+9+8.1+... เป็นอนุกรมเรขาคณิต

a1 = 10, r =  = 0.9

จากสูตร S∞ = 

= 

= 

= 100

ดังนั้น ลูกตุ้มแกว่งได้ทางทั้งสิ้น 100 เซนติเมตร

8. อาจารย์ให้นักเรียนแบ่งกลุ่มทำกิจกรรมที่ 1.2 ก กลุ่มละ 3 ข้อ แล้วร่วมกันอภิปรายคำตอบที่ได้ของแต่ละกลุ่ม

**กิจกรรมรวบยอด**

อาจารย์และนักเรียนร่วมกันสรุปตามประเด็นต่อไปนี้

1) อนุกรมได้จากการบวกพจน์ทุกพจน์ของลำดับ

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต คือ

Sn =  เมื่อทราบพจน์แรกและผลต่างร่วม

หรือ Sn =  เมื่อทราบพจน์แรกและพจน์ที่ n

ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต คือ

Sn =  , r ≠ 1 เหมาะสำหรับ |r| > 1

หรือ Sn =  , r ≠ 1 เหมาะสำหรับ |r| < 1

2) อนุกรมอนันต์ใดๆ เรียกว่า อนุกรมลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ lim Sn หาค่าได้

n → ∞

อนุกรมอนันต์ใดๆ เรียกว่า อนุกรมลู่ออก ก็ต่อเมื่อ lim Sn หาค่าไม่ได้

n → ∞

3) การหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ก็คือการหาค่า S โดยที่ S = lim Sn

n → ∞

**สื่อ/แหล่งการเรียนรู้**

- แบบฝึกหัด หนังสือเรียน วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เล่ม 6 สสวท

- บทเรียนออนไลน์ใน www.elsd.ssru.ac.th/ketum.sa

**การวัดและการประเมิน**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **เป้าหมาย** | **หลักฐาน** | **เครื่องมือวัด** | **เกณฑ์การประเมิน** |
| **ด้านความรู้**  - อนุกรมอนันต์  - ความสมเหตุสมผลของคำตอบจากการคำนวณและการแก้ปัญหาได้ | 1. สังเกตจากการซักถาม การแสดง ความคิดเห็น การให้ข้อเสนอแนะ และการอภิปรายร่วมกัน  2. ตรวจผลการปฏิบัติตามใบงานที่ 1 ลำดับจำกัด และลำดับอนันต์  3. ตรวจผลการทำแบบฝึกหัด | - แบบฝึกหัด  - แบบทดสอบ  - เอกสารประกอบการเรียน บทเรียนออน์ไลน์ | ตรวจสอบความถูกต้องของวิธีทำและคำตอบ |
| **ด้านทักษะ/กระบวนการ**  - การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมาย การนำเสนอและการเชื่อมโยงหลักการความรู้ทางคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น | 1. สังเกตพฤติกรรมขณะทำงานร่วมกับกลุ่ม  2. ประเมินพฤติกรรมตามรายการด้านคุณธรรม จริยธรรมและค่านิยม | – แบบประเมินพฤติกรรมขณะทำงานร่วมกับกลุ่ม  – แบบประเมินด้านคุณธรรม จริยธรรม และค่านิยม | ผ่านเกณฑ์เฉลี่ย 3 ขึ้นไป |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **เป้าหมาย** | **หลักฐาน** | **เครื่องมือวัด** | **เกณฑ์การประเมิน** |
| **ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์**  - มีระเบียบเรียบร้อย รอบคอบ และมีความเชื่อมั่นในตนเอง | 1. สังเกตพฤติกรรมการสื่อสารการเชื่อมโยงหลักการความรู้ ทางคณิตศาสตร์  2. ประเมินพฤติกรรมตามรายการประเมินด้านทักษะ/กระบวนการ  3. สังเกตขณะการปฏิบัติตามใบงานที่ 1 ลำดับจำกัดและลำดับอนันต์  4. สังเกตขณะทำแบบฝึกหัด | - – แบบประเมินด้านทักษะ/  กระบวนการ | ผ่านเกณฑ์เฉลี่ย 3 ขึ้นไป |
| **ด้านสมรรถนะ**  - ความสามารถในการสื่อสาร  - ความสามารถในการคิด  - ความสามารถในการแก้ปัญหา | - แบบฝึกหัด  - บทเรียนออนไลน์ | - แบบฝึกหัด  - บทเรียนออนไลน์ | ผ่านเกณฑ์เฉลี่ย 3 ขึ้นไป |

**บันทึกหลังการสอน**

**แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2**

**ผลการสอน**

......................................................................................................................................................................................................................................................................................................................................

......................................................................................................................................................................................................................................................................................................................................

**ปัญหาและอุปสรรค**

......................................................................................................................................................................................................................................................................................................................................

......................................................................................................................................................................................................................................................................................................................................

**ข้อเสนอแนะ**

......................................................................................................................................................................................................................................................................................................................................

...................................................................................................................................................................

ลงชื่อ..............................................

(อาจารย์เกตุม สระบุรินทร์)

อาจารย์ผู้สอน

**ความเห็นของหัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้**

......................................................................................................................................................................................................................................................................................................................................

...................................................................................................................................................................

ลงชื่อ..............................................

(อาจารย์น้ำผึ้ง ชูเลิศ)

หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้

**ความเห็นของรองผู้อำนวยการฝ่ายวิชาการ**

......................................................................................................................................................................................................................................................................................................................................

...................................................................................................................................................................

ลงชื่อ..............................................

(อาจารย์ ดร.สุดารัตน์ ศรีมา)

รองผู้อำนวยการฝ่ายวิชาการ