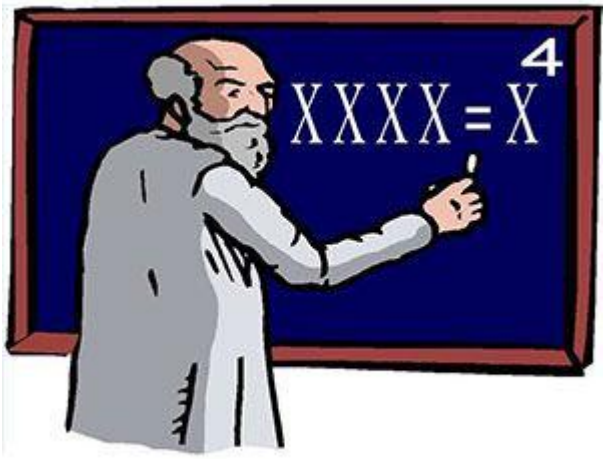
เอกสารประกอบการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ 3 (ค32102)

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2560

เรื่อง เลขยกกำลัง



ชื่อ-นามสกุล .....

ชั้น ม. 5 ห้อง ..... เลขที่ .....

โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา กรุงเทพมหานคร

บทที่1 เลขยกกำลัง

1. เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม

บทนิยาม ถ้า a เป็นจำนวนจริงและ n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ ตัว}}.$$

เรียก a^n ว่า เลขยกกำลัง

เรียก a ว่า ฐานของเลขยกกำลัง

และ เรียก n ว่า เลขชี้กำลัง

ทบทวนสมบัติเลขยกกำลัง

ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็น 0 และ m, n เป็นจำนวนเต็ม จะได้

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ โดยที่ $b \neq 0$
5. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
6. $a^{-n} = \frac{1}{n}$ เมื่อ $a \neq 0$
7. $a^0 = 1$ เมื่อ $a \neq 0$

ตัวอย่างที่ 1 จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

1. $2^3 \cdot 2^4$ = ...
2. $\frac{2^5}{2^2}$ = ...
3. $\frac{3^2}{3^5}$ = ...
4. $(2^3)^4$ = ...
5. $3^2 \cdot 4^2$ = ...
6. $\left(\frac{4}{3}\right)^2$ = ...
7. 5^{-2} = ...
8. $\frac{1}{4^{-2}}$ = ...

ตัวอย่างที่ 2 จงทำให้เป็นรูปอย่างง่ายและมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

1.1 $\left(\frac{x}{y}\right)^3\left(\frac{y^2x}{z}\right)^4$

1.2 $(5^{p-q})(5^{3p+3q})$

1.3 $\frac{(a^2b^3)^5}{a^6b^5}$

1.4 $\left(\frac{a^5b^3c^2}{a^4b^7}\right)^3$

1.5 $\left(\frac{a^2b^{-1}}{a^{-2}b^{-4}}\right)^{-3}\left(\frac{a^{-2}b^2}{a^{-5}b^{-3}}\right)^2$

1.6 $\left(\frac{6a^{-3}b^{-2}}{3a^2b^{-5}}\right)^{-2} \div \left(\frac{2a^2b^{-2}}{(a^{-2}b^3)^2}\right)^2$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จงหาค่าของ

1. $\frac{7^{n+2} - 28\cdot 7^{n-1}}{7^n}$

2. $\frac{6\cdot 2^{n+1} - 2^{n+4}}{2^{n+2}\cdot 7}$

3. $\frac{11\cdot 3^{n-2} + 3^{n+1}}{3^{n+2} - 3^{n-2}}$

4. $\frac{5\cdot 2^{n+1} + 5\cdot 2^{n+2}}{2^{n+2} - 7\cdot 2^{n-1}}$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ

1. $\dfrac{2^{-3}\cdot 3^{-5}}{3^{-5}\cdot 2^{0}}$

2. $\dfrac{12^{4}\cdot 10^{2}}{15^{4}\cdot 64}$

3. $\dfrac{28^{3}\cdot 15^{5}}{20\cdot 21^{4}}$

4. $\dfrac{18^{3}\cdot 25^{2}}{27\cdot 50^{3}}$

Worksheet1เรื่อง เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม

1. จงหาค่าต่อไปนี้

1.) $\left(\frac{a^5b^3c^2}{a^4b^7}\right)^3$

2.) $\left(\frac{a^{-2}b^3}{a^3b^{-2}}\right)^2\left(\frac{a^4b^{-2}}{a^0b^{-5}}\right)^3$

3.) $\left(\frac{4a^{-1}b^2}{6a^{-2}b^{-1}}\right)^2 \div \left(\frac{12a^3b^2}{4a^{-2}b^{-3}}\right)^{-3}$

4.) $\frac{a^{-3}+b^{-3}}{a^{-1}+b^{-1}}$

2. จงหาค่าของ

1. $\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}b^{-1}}$

2. $\frac{(2^{p+1})^q}{(2^{q+1})^p} \times \frac{2^{2p}}{2^{2q}} \times 2^q$

3. $\frac{5\cdot 3^n - 9\cdot 3^{n-2}}{3^n - 3^{n-1}}$

4. $\frac{10\times 2^{n-1} - 24\times 2^{n-1}}{2^{n+1}\times 3 - 2^n}$

5. $\frac{4^{2-n}\times 2^{2n+1}\times 8^{n+1}}{2^{3n+2}}$

6. $\frac{3\cdot 2^{n}-4\cdot 2^{n-2}}{2^{n}-2^{n-1}}$

7. $\frac{2^{n+1}}{(2^{n})^{n-1}}\div\frac{4^{n+1}}{\left(2^{n-1}\right)^{n+1}}$

8. $\frac{15\times 7^{a}-9\times 7^{a+1}}{9\times 7^{a}+7^{a+1}}$

9. $\frac{9^{2}(27)^{2-n}}{(81)^{-n}(27)^{3}(3)^{n-1}}$

10. $(a(a(a^{-1}))^{-1})^{-1}$

11. $\frac{5\cdot 3^{n}-9\cdot 3^{n-2}}{2\cdot 3^{n}-3^{n-1}\cdot 2}$

12. $\frac{10^{15}\times 9^{7}}{15^{4}\times 8^{4}}$

2. รากที่ n ในระบบจำนวนจริงและจำนวนจริงในรูปกรณฑ์

2.1 รากที่สองของจำนวนจริง

บทนิยาม ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงใดใด b เป็นรากที่สองของ a ก็ต่อเมื่อ $b^2 = a$

ตัวอย่างที่ 5

รากที่สองของ 9 คือ .....

รากที่สองของ 25 คือ .....

รากที่สองของ 3 คือ .....

รากที่สองของ 5 คือ .....

รากที่สองของ $\frac{7}{4}$ คือ .....

ค่าประมาณของจำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์

การหารากที่สอง การหารากที่สองมีหลายวิธี ดังนี้

1. การหารากที่สองโดยวิธีแยกตัวประกอบ

ตัวอย่างที่ 6 จงหารากที่สองของ 225

วิธีทำ 225 = ...

= .....

= .....

ดังนั้น รากที่สองของ 225 คือ .....

2. การหารากที่สองโดยวิธีการประมาณค่าเฉลี่ย มีขั้นตอนดังนี้

หารากที่สองของ $\sqrt{5}$

ขั้นที่ 1 หาจำนวนเต็มบวก**สองจำนวนเรียงกัน** ที่กำลังสองของจำนวนเต็มบวกนั้นมีค่าน้อยกว่าและมากกว่าจำนวนที่ต้องการหารากที่สอง เช่น ต้องการหารากที่สองของ 5 จำนวนเต็มสองจำนวนน่าจะเป็น 2 และ 3 โดยที่

$2^2 < 5 < 3^2$

$2 < \sqrt{5} < 3$ แสดงว่ารากที่สองของ 5 อยู่ระหว่าง 2 กับ 3

ขั้นที่ 2 นำจำนวนเต็มทั้งสองที่หาได้ในขั้นที่ 1 มาหาค่าเฉลี่ย จะได้ $\frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$

ขั้นที่ 3 นำค่าเฉลี่ยของขั้นที่ 2 ไปหารจำนวนที่ต้องการหารากที่สอง แล้วพิจารณาว่า จำนวนที่ต้องการหา

รากที่สองอยู่ระหว่างสองจำนวนใด นั่นคือ $\frac{5}{2.5}=2$ แสดงว่า $\sqrt{5}$ อยู่ระหว่าง 2 กับ 2.5

จะได้ $2^2<(\sqrt{5})^2<2.5^2$

$2<\sqrt{5}<2.5$

ขั้นที่ 4 นำจำนวนทั้งสองที่หาได้จากขั้นที่ 3 มาหาค่าเฉลี่ยเช่นเดียวกับขั้นที่ 2 และ 3 ไปเรื่อยๆจนกว่าจะได้ค่าของรากที่สองของจำนวนที่ต้องการหารากที่สอง ตามตำแหน่งทศนิยมที่ต้องการ

จะได้ $\frac{2+2.5}{2}=2.25$ (ขั้นที่ 2 หาค่าเฉลี่ย)

$\frac{5}{2.25}=2.22$ (ขั้นที่ 3 นำไปหารจำนวนที่ต้องการหารากที่สอง)

แสดงว่า $2.22<\sqrt{5}<2.25$

จะได้ $\frac{2.22+2.25}{2}=2.235$ (ขั้นที่ 2 หาค่าเฉลี่ย)

$\frac{5}{2.235}=2.237$ (ขั้นที่ 3 นำไปหารจำนวนที่ต้องการหารากที่สอง)

แสดงว่า $2.235^2<(\sqrt{5})^2<2.237^2$

$2.235<\sqrt{5}<2.237$

จะได้ $\frac{2.235+2.237}{2}=2.236$ (ขั้นที่ 2 หาค่าเฉลี่ย)

$\frac{5}{2.236}=2.2361$ (ขั้นที่ 3 นำไปหารจำนวนที่ต้องการหารากที่สอง)

แสดงว่า $2.236^2<(\sqrt{5})^2<2.2361^2$

$2.236<\sqrt{5}<2.2361$

ดังนั้น ค่าโดยประมาณ $\sqrt{5}$ คือ 2.236 และ -2.236 (ทศนิยม 3 ตำแหน่ง)

3. การหารากที่สองโดยวิธีการตั้งหาร ดำเนินการดังนี้

ขั้นที่ 1 แบ่งกลุ่มตัวเลขของจำนวนที่ต้องการหารากที่สอง ในส่วนของจำนวนเต็มแบ่งจากขวาไปซ้าย ส่วนทศนิยมแบ่งจากซ้ายไปขวากลุ่มละ 2 ตัว เช่น ต้องการหารากที่สองของ $315.426 \rightarrow 3\ 15\ .\ 42\ 60$

ขั้นที่ 2 ตั้งหารยาว แล้วหาตัวเลข 2 ตัวที่เท่ากันคูณกัน ได้เท่ากับหรือน้อยกว่าตัวเลขที่อยู่กลุ่มซ้ายสุด หาเศษเหลือแล้วดึงเลขสองหลักในกลุ่มถัดไปลงมา

ขั้นที่ 3 นำ 2 คูณ ผลลัพธ์ที่ได้นำมาเป็นตัวต้นของตัวหารครั้งต่อไปโดยหาเลข 0 ถึง 9 มาต่อท้าย ให้ผลคูณของตัวหารทั้งหมดกับตัวต่อท้ายมีค่าเท่ากับหรือน้อยกว่าเศษเหลือและเลขสองหลักที่ดึงลงมา

ขั้นที่ 4 **ทำ**เช่นเดียวกันกับขั้นที่ 2,3 ไปเรื่อย จนได้จำนวนที่เป็นรากที่สองมีทศนิยมตามที่ต้องการ

ตัวอย่างที่ 7 จงหาค่าประมาณของ $\sqrt{239.2535}$ (ทศนิยม 2 ตำแหน่ง)

$2 \cdot 1$ 1

$\overline{)\ 2\ ,\ 39\ .\ 25\ ,\ 35}$

1

1 , 39 —

———

—

———

—

———

24 19

ดังนั้น ค่าประมาณของ $\sqrt{239.2535}$ คือ .....

การหารากที่สาม

หาค่าประมาณของ $\sqrt[3]{29}$ ทำได้ดังนี้

วิธีที่ 1 หาจำนวนจริง a ที่ a^3 มีค่าใกล้เคียงกับ 29

จาก $3^3 = 27$ และ $4^3 = 64$ ดังนั้น $\sqrt[3]{29}$ มีค่าประมาณมากกว่า 3 แต่ไม่ถึง 4

หาจำนวนจริงที่มากกว่า 3 แต่น้อยกว่า 4 ที่ยกกำลังสามแล้วมีค่าใกล้เคียง 29

พิจารณาจาก 3.1 , 3.2 , 3.3 , ..., 3.9 จะได้ว่า $(3.1)^2 = 29.791$

ดังนั้น $\sqrt[3]{29}$ มีค่าประมาณมากกว่า 3 แต่ไม่ถึง 3.1

หาจำนวนจริงที่มากกว่า 3 แต่น้อยกว่า 3.1 ที่ยกกำลังสามแล้วมีค่าใกล้เคียง 29

พิจารณาจาก **3.01, 3.02, 3.03, ..., 3.09** (เนื่องจาก $(3.05)^2 \approx 28.373$ ทำให้คาดเดาได้ว่าจำนวนที่ควรทดลองยกกำลังสามควรมากกว่า 3.05)

เนื่องจาก $(3.08)^2 \approx 29.218$

$(3.07)^3 \approx 28.934$

$(3.06)^3 \approx 28.653$

ดังนั้น 3.07 เป็นค่าประมาณของ $\sqrt[3]{29}$

วิธีที่ 2 เนื่องจาก $3^3 = 27$ และ $4^3 = 64$

ดังนั้น $\sqrt[3]{29}$ มีค่าประมาณมากกว่า 3 แต่ไม่ถึง 4

เนื่องจาก $\left(\frac{3+4}{2}\right)^3 = (3.5)^3 \approx 42.875$

ดังนั้น $\sqrt[3]{29}$ มีค่าประมาณมากกว่า 3 แต่ไม่ถึง 3.5

เนื่องจาก $\left(\frac{3+3.5}{2}\right)^3 = (3.25)^3 \approx 34.328$

ดังนั้น $\sqrt[3]{29}$ มีค่าประมาณมากกว่า 3 แต่ไม่ถึง 3.25

เนื่องจาก $\left(\frac{3+3.25}{2}\right)^3 = (3.125)^3 \approx 30.518$

ดังนั้น $\sqrt[3]{29}$ มีค่าประมาณมากกว่า 3 แต่ไม่ถึง 3.125

เนื่องจาก $\left(\frac{3+3.125}{2}\right)^3 = (3.0625)^3 \approx 28.723$

ดังนั้น $\sqrt[3]{29}$ มีค่าประมาณมากกว่า 3 แต่ไม่ถึง 3.25

เนื่องจาก $\left(\frac{3.0625+3.125}{2}\right)^3 = (3.094)^3 \approx 29.618$

ดังนั้น $\sqrt[3]{29}$ มีค่าประมาณมากกว่า 3.0625 แต่ไม่ถึง 3.094

เนื่องจาก $\left(\frac{3.0625+3.094}{2}\right)^3 = (3.078)^3 \approx 29.161$

ดังนั้น $\sqrt[3]{29}$ มีค่าประมาณมากกว่า 3.0625 แต่ไม่ถึง 3.078

เนื่องจาก $\left(\frac{3.0625+3.078}{2}\right)^3 = (3.07)^3 \approx 28.934$

ดังนั้น $\sqrt[3]{29}$ มีค่าประมาณของ $\sqrt[3]{29}$

วิธีที่ 3 ใช้เครื่องคิดเลขที่มีฟังก์ชั่น $\sqrt[x]{y}$ จะได้ $\sqrt[3]{29}$ มีค่าประมาณ 3.072316826

แบบฝึกหัด (แสดงวิธีทำลงสมุด)

1. จงหารากต่อไปนี้โดยวิธีการประมาณ

1.1 $\sqrt{40}$ 1.2 $\sqrt{7.2}$ 1.3 $\sqrt[3]{25}$

2. จงหารากที่สองโดยวิธีการตั้งหาร

2.1 $\sqrt{484}$ **2.2** $\sqrt{3969}$

2.3 $\sqrt{27889}$ **2.4** $\sqrt{1000}$

2.5 $\sqrt{5678.12}$ **2.6** $\sqrt{7.89}$

2.2 รากที่ n ของจำนวนจริง

บทนิยาม ให้ a, b เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1

b เป็นรากที่ n ของ a ก็ต่อเมื่อ $b^n = a$

ตัวอย่างที่ 8 จงเขียนในรูปของราก

1. รากที่ 4 ของ 16 คือ.....
2. รากที่ 3 ของ -343 คือ.....
3. รากที่ 5 ของ 243 คือ.....
4. รากที่ 6 ของ 0 คือ.....
5. รากที่ 7 ของ 1 คือ.....
6. รากที่ 4 ของ -81 คือ.....
7. รากที่ 2 ของ 32 คือ.....
8. รากที่ 3 ของ 27 คือ.....
9. รากที่ 3 ของ -7 คือ.....
10. รากที่ 2 ของ 125 คือ.....

n เป็นจำนวนคู่	n เป็นจำนวนคี่
1. รากที่ n ของ a จะหาค่าได้เมื่อ $a \geq 0$ เท่านั้น 2. ถ้า $a = 0$ แล้วรากที่ n ของ $a = 0$ 3. ถ้า $a > 0$ (เป็นบวก) รากที่ n ของ a จะมีค่าสองค่าเสมอเป็นบวกและลบ 4. ถ้า $a < 0$ (เป็นลบ) รากที่ n ของ a จะหาค่าไม่ได้ในระบบจำนวนจริง	1. รากที่ n ของ a หาค่าได้เสมอสำหรับจำนวนจริงใดใด 2. ถ้า $a = 0$ แล้วรากที่ n ของ $a = 0$ 3. ถ้า $a > 0$ (เป็นบวก) รากที่ n ของ a จะมี 1 ค่า และเป็นจำนวนจริงบวก 4. ถ้า $a < 0$ (เป็นลบ) รากที่ n ของ a จะมี 1 ค่า และเป็นจำนวนจริงลบ

ตัวอย่างที่ 9 จงหาค่าของ

1. รากที่ 4 ของ 16 คือ ..... เนื่องจาก.....
2. รากที่ 3 ของ -343 คือ ..... เนื่องจาก.....
3. รากที่ 5 ของ -243 คือ ..... เนื่องจาก.....
4. รากที่ 7 ของ 128 คือ ..... เนื่องจาก.....
5. รากที่ 6 ของ 125 คือ ..... เนื่องจาก.....
6. รากที่ 8 ของ -625 คือ ..... เนื่องจาก.....

ค่าหลักของรากที่ n

บทนิยาม ให้ a เป็นจำนวนจริงที่มีรากที่ n จะกล่าวว่าจำนวนจริง b เป็นค่าหลักของรากที่ n ของ a ก็ต่อเมื่อ

1. b เป็นรากที่ n ของ a
2. $a \cdot b \geq 0$

แทนค่าหลักของรากที่ n ของ a ด้วย $\sqrt[n]{a} = b$

ข้อตกลงเกี่ยวกับค่าหลักของรากที่ n

1. เครื่องหมาย $\sqrt[n]{\ldots}$ เรียกว่า **"เครื่องหมายกรณฑ์"** และเรียก n ว่า เป็นอันดับของกรณฑ์
2. $\sqrt[n]{a}$ อ่านว่า กรณฑ์ที่ n ของ a หรือ รากที่ n ของ a

ตัวอย่างที่ 10 จงหาค่าหลักต่อไปนี้

1. ค่าหลักของรากที่ 2 ของ $\frac{4}{81}$ คือ .....
2. ค่าหลักของรากที่ 2 ของ $\frac{625}{169}$ คือ .....
3. ค่าหลักของรากที่ 4 ของ 81 คือ .....
4. ค่าหลักของรากที่ 4 ของ 16 คือ .....
5. ค่าหลักของรากที่ 5 ของ -32 คือ .....
6. ค่าหลักของรากที่ 6 ของ 729 คือ .....
7. ค่าหลักของรากที่ 7 ของ -128 คือ .....
8. ค่าหลักของรากที่ 7 ของ -1 คือ .....
9. ค่าหลักของรากที่ 8 ของ 1 คือ .....
10. ค่าหลักของรากที่ 8 ของ -256 คือ .....

รากที่ n ของจำนวนจริง

สมบัติที่สำคัญของรากที่ n ของจำนวนจริง

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 ; a,b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $\sqrt[n]{a}$ และ $\sqrt[n]{b}$ หาค่าได้

1. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
2. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
3. $\sqrt[n]{a} = x$ ก็ต่อเมื่อ $a = x^n$
4. $\sqrt[n]{1}=1$ เสมอ
5. $\sqrt[n]{0} = 0$
6. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
7. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

หมายเหตุ

ถ้า a เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 จะได้ว่า

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ |a| & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$$

ตัวอย่างที่ 11 จงทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1. $\sqrt{8}$ = ...
2. $\sqrt{162}$ = ...
3. $\sqrt{50}$ = ...
4. $\sqrt{20}$ = ...
5. $\sqrt[3]{16}$ = ...
6. $\sqrt[3]{81}$ = ...
7. $\sqrt[3]{54}$ = ...
8. $\sqrt[4]{64}$ = ...
9. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ = ...
10. $\left(\sqrt[3]{5}\right)^4$ = ...
11. $\sqrt[3]{27a^3}$ = ...
12. $\sqrt{18a^2b^3}$ = ...

Worksheet 2 เรื่อง รากที่ n ของจำนวนจริง

1. จงเติมคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง

1. รากที่สองของ 144 เท่ากับ..... ค่าหลักของรากที่สองของ 144 เท่ากับ.....
2. รากที่สามของ 729 เท่ากับ..... ค่าหลักของรากที่สามของ 729 เท่ากับ.....
3. รากที่สามของ -512 เท่ากับ.....ค่าหลักของรากที่สามของ -512 เท่ากับ.....
4. รากที่หกของ 64 เท่ากับ.....ค่าหลักของรากที่หกของ 64 เท่ากับ.....
5. รากที่สองของ 3 เท่ากับ.....ค่าหลักของรากที่สองของ 3 เท่ากับ.....

2. จงทำจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1.) $\sqrt[4]{81}$ = ... 2.) $\sqrt[6]{729}$ = ...

3.) $\sqrt{42-6}$ = ... 4.) $\sqrt{169-25}$ = ...

5.) $\sqrt[5]{-64}$ = ... 6.) $\sqrt[3]{108}$ = ...

3. จงหาผลสำเร็จต่อไปนี้ โดยใช้สมบัติ $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases} a & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ |a| & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$

1.) $\sqrt{4^2}$ = ... 2.) $\sqrt[3]{(-8)^3}$ = ...

3.) $\sqrt[4]{(-5)^4}$ = ... 4.) $\sqrt[6]{(-3)^6}$ = ...

5.) $\sqrt[3]{8\times(-12)^3\times6^6}$ = ... 6.) $\sqrt[5]{2\times6^5\times9^{10}\times4^7}$ = ...

การหาผลบวก ผลต่าง ผลคูณและผลหารของกรณฑ์

การบวกลบจำนวนที่อยู่ในกรณฑ์

หลักการ 1.) กรณฑ์ที่จะนำมา **บวก ลบ** กันได้ ก็ต่อเมื่อ กรณฑ์ที่มีอันดับเดียวกัน และจำนวนที่อยู่ใต้กรณฑ์เป็นจำนวนเดียวกัน

2.) การที่ทำให้จำนวนที่อยู่ใต้กรณฑ์เท่ากัน ก็ให้ทำจำนวนใต้กรณฑ์เป็นจำนวนเฉพาะหรือจำนวนที่ต่ำที่สุด

3.) การบวก ลบ กรณฑ์ที่เหมือนกัน ให้นำสัมประสิทธิ์หน้ากรณฑ์มา **บวก ลบ** กัน

$$a\sqrt[n]{x} \pm b\sqrt[n]{x} = (a \pm b)\sqrt[n]{x}$$

เช่น $4\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{2}-6\sqrt[3]{2} = (4+5-6)\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$

ตัวอย่างที่ 12 จงหาค่าของ

1. $2\sqrt{32}+\sqrt{8}-6\sqrt{2}$
2. $3\sqrt{3}+\sqrt{243}-2\sqrt{27}$
3. $\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{-54}-\sqrt[3]{250}$
4. $\sqrt[3]{5}-7\sqrt[3]{40}-3\sqrt[3]{-625}$
5. $3\sqrt{8}+2\sqrt{50}-4\sqrt{32}$
6. $7\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}-2\sqrt[3]{250}$

7. $\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{-375}+4\sqrt[3]{192}$

8. $2\sqrt{18}+\sqrt{200}-2\sqrt[4]{64}$

9. $\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{128}-\sqrt[3]{432}$

10. $\sqrt[4]{25}-\sqrt{20}+\sqrt[6]{45^3}$

แบบฝึกหัด การบวกลบจำนวนที่อยู่ในกรณฑ์ (แสดงวิธีทำลงสมุด)

1. จงทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1.) $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}$

2.) $7\sqrt{3}-\sqrt{3}$

3.) $11\sqrt{5}-6\sqrt{5}-7\sqrt{5}$

4.) $5\sqrt{5}-\sqrt{5}+3\sqrt{5}$

5.) $5\sqrt{5}-\sqrt{2}+3\sqrt{5}+4\sqrt{2}$

6.) $5\sqrt{2}+4\sqrt{3}-2\sqrt{2}-6\sqrt{3}$

7.) $4\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{2}-6\sqrt[3]{2}$

8.) $7\sqrt{a}+2\sqrt{a}-9\sqrt{a}$

9.) $4\sqrt{13}+8+5\sqrt{13}-7$

10.) $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-7\sqrt{3}+5\sqrt{2}$

2. จงทำให้อยู่ในรูปสำเร็จ

1.) $\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{3}$

2.) $3\sqrt{20}+2\sqrt{18}-\sqrt{45}+\sqrt{8}$

3.) $\sqrt{18}+2\sqrt{18}-\sqrt{45}+\sqrt{8}$

4.) $\sqrt{32}-\sqrt{48}-\sqrt{80}$

5.) $\sqrt{18}+2\sqrt[3]{-125}-3\sqrt[4]{4}$

6.) $\sqrt{3}+\sqrt{\frac{1}{3}}$

7.) $\sqrt{50}-\sqrt[4]{4}+\sqrt{\frac{9}{2}}$

8.) $2\sqrt{x^3}-x\sqrt{x}-x^2\sqrt{\frac{1}{x}}$

Worksheet 3 เรื่อง การหาผลบวกและผลต่าง

คำชี้แจง จงหาค่าต่อไปนี้

1.) $\sqrt{50}+\sqrt{32}$

2.) $\sqrt{28}+\sqrt{63}$

3.) $\sqrt{27}+\sqrt{18}$

4.) $8\sqrt{5}+3\sqrt{80}-7\sqrt{20}$

5.) $3\sqrt{8}-\sqrt{2}+\sqrt{32}$

6.) $\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{3}$

7.) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}-3\sqrt{\frac{1}{6}}+\frac{1}{2}\sqrt{6}$

8.) $\sqrt{18}+\sqrt[3]{128}+\sqrt{8}-\sqrt[3]{54}$

9.) $2\sqrt{20}+\sqrt{180}-3\sqrt{24}+\sqrt{54}$

10.) $7\sqrt[3]{56}+3\sqrt[3]{16}-7\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{128}$

ผลคูณและผลหารในรูปกรณฑ์

ผลคูณ – ผลหาร

หลัก 1.) กรณฑ์จะคูณเป็นจำนวนเดียวกันได้ **ก็ต่อเมื่อ** อันดับของกรณฑ์ต้องเหมือนกัน

2.) เมื่ออันดับของกรณฑ์เหมือนกัน ก็นำจำนวนภายใต้กรณฑ์คูณกัน

ทฤษฎีบท ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงที่มีรากที่ n แล้ว

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad , \ b \neq 0$$

ตัวอย่างที่ 13 จงหาผลคูณของ

1. $3\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{28}$

2. $\dfrac{5\sqrt{108}}{\sqrt{3}}$

3. $\dfrac{3\sqrt[3]{2} \cdot 2\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{3}}$

4. $\sqrt[5]{-25} \cdot \sqrt[5]{125}$

ตัวอย่างที่ 14 จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

1.) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$ = ...

2.) $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{49}$ = ...

3.) $2\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{6}$ = ...

4.) $\sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{4}$ = ...

5.) $-\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{-18}$ = ...

6.) $\dfrac{\sqrt{64}}{\sqrt{2}}$ = ...

7.) $\dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$ = ...

8.) $\dfrac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}}$ = ...

9.) $\dfrac{\sqrt[6]{256}}{\sqrt[6]{2}}$ = ...

10.) $\dfrac{\sqrt[3]{-80}}{\sqrt[3]{2}}$ = ...

ตัวอย่างที่ 15 จงหาผลสำเร็จต่อไปนี้

1.) $\frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{-4}}$

2.) $\frac{\sqrt[5]{-27}\sqrt[-5]{45}}{\sqrt[5]{-5}}$

3.) $\frac{\sqrt[4]{60}\sqrt[4]{28}}{\sqrt[4]{189}\sqrt[4]{45}}$

4.) $\frac{\sqrt[4]{12}\sqrt[4]{54}}{\sqrt[4]{20}\sqrt[4]{250}}$

5.) $\sqrt[4]{81a^{12}b^{8}}$

6.) $\sqrt[6]{64a^{12}b^{18}}$

7.) $\sqrt{10a^3b}\times\sqrt{2ab^2}$

8.) $\sqrt{3ab^3c}\times\sqrt{2a^2bc^4}\times\sqrt{6a^3b^4c^3}$

9.) $\sqrt[6]{32x^4y^5z^3}\times\sqrt[6]{2x^2yz^3}$

10.) $\dfrac{\sqrt{27a^5b^7}}{\sqrt{3ab}}$

11.) $\dfrac{\sqrt[3]{16a^8b^5}}{\sqrt[3]{2a^2b^{-2}}}$

12.) $\dfrac{3\times\sqrt[4]{x^7y}}{6\times\sqrt[4]{x^3y^{-7}}}$

สังยุค (conjugate)

สังยุคหรือคอนจุเกต(conjugate)

การคูณหรือการหารรากมักจะใช้ conjugate เพื่อให้รากของตัวส่วนหายไป

บทนิยาม ให้ $\sqrt{a}$ และ $\sqrt{b}$ หาค่าได้

1.) คอนจุเกตของ $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ คือ $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

2.) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$

มาจาก ⇨ ผลต่างกำลังสอง $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

ตัวอย่างที่ 16 คอนจูเกตของ $(\sqrt{5}+\sqrt{2})$ คือ $(\sqrt{5}-\sqrt{2})$

และ $(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2}) = (\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2$

$= 5-2 = 3$

ผลต่างกำลังสอง
$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

ตัวอย่างที่ 17 คอนจูเกตของ $(3-\sqrt{2})$ คือ $(3+\sqrt{2})$

และ $(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})$ =.....

=.....

ผลต่างกำลังสอง
$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

ตัวอย่างที่ 18 จงหาผลคูณของ $(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})$

ตัวอย่างที่ 19 จงหาผลคูณของ $(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})$

การหาผลหารของกรณฑ์

กรณีที่ 1 : ส่วนที่มีกรณฑ์เพียงตัวเดียว

เช่น $\frac{b}{\sqrt{a}}$ นักเรียนสามารถคูณ $\sqrt{a}$ ทั้งเศษและส่วน โดยคุณสมบัติ $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=\sqrt{a^2}=a$

ซึ่งทำให้ส่วนไม่ติดกรณฑ์ดังนี้ $\frac{b}{\sqrt{a}}=\frac{b}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a^2}}=\frac{b\sqrt{a}}{a}$

ตัวอย่างที่ 20 จงหาผลหาร (ทำให้ส่วนไม่ติดกรณฑ์)

1. $\frac{3}{\sqrt{3}}$

2. $\frac{4\sqrt{108}}{\sqrt{3}}$

ตัวอย่างที่ 21 จงหาค่าของ

1. $9\sqrt{\frac{2}{3}}+8\sqrt{\frac{3}{2}}-36\sqrt{\frac{1}{6}}$

2. $6\sqrt{\frac{5}{2}}-10\sqrt{\frac{2}{5}}+20\sqrt{\frac{1}{10}}$

กรณีที่ 2 : ส่วนที่มีกรณฑ์ 2 พจน์บวกกัน

เช่น $\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ หรือ $\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ สามารถแก้โดยใช้หลักการ ผลต่างกำลังสอง $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

ซึ่งเรียก $(a-b)$ กับ $(a+b)$ ว่าเป็นคู่สังยุค (conjugate) ซึ่งกันและกัน

ตัวอย่างที่ 22 จงทำให้ส่วนไม่ติดกรณฑ์

1. $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$

2. $\frac{6}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

3. $\dfrac{2\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

ตัวอย่างที่ 23 จงหาค่าของจำนวนต่อไปนี้

1. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

2. $\dfrac{2\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{1-4\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

แบบฝึกหัด จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปตัวส่วนไม่ติดกรณฑ์ (แสดงวิธีทำลงสมุด)

1.) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ 2.) $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$ 3.) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 4.) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

5.) $\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{10}}{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}$ 6.) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ 7.) $\dfrac{6\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$ 8.) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

Worksheet 4 เรื่อง การคูณและการหารของกรณฑ์

ตอนที่1 : จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปตัวส่วนไม่ติดกรณฑ์

1. $\frac{3a}{5}\sqrt{\frac{10x^3}{21a^2}}\cdot\frac{1}{6}\sqrt{\frac{7a}{3x}}$

2. $\sqrt[4]{(1-\frac{1}{2})}\times\sqrt[4]{(2-\frac{1}{2})^2}\times\sqrt[4]{(5-\frac{1}{2})}$

3. $\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\times\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}\times\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}\times\sqrt{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}\times\sqrt{3}$

4. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5xy^5}{4}}\times1.2\sqrt{0.5xy}\times\sqrt{5x^5y^5}\times4x\sqrt{2x^3y}$

5. $\frac{\sqrt{6}-3}{2-\sqrt{6}}$

6. $\frac{4\sqrt{3}-\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

7. $\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$

8. $\frac{8\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{9\sqrt{3}-4\sqrt{5}}$

ตอนที่ 2 : จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปตัวส่วนไม่ติดกรณฑ์

1. $\frac{1}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

2. $\frac{7\sqrt{6}+3\sqrt{5}}{4\sqrt{6}+\sqrt{5}}$

3. $\frac{10\sqrt{6}-2\sqrt{7}}{3\sqrt{6}+2\sqrt{7}}$

4. $\frac{2\sqrt{a}}{5\sqrt{a}-3\sqrt{x}}$

ตอนที่ 3 : จงทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1. $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

2. $\frac{18}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{12}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

3. $\frac{7+\sqrt{5}}{7-\sqrt{5}}-\frac{7-\sqrt{5}}{7+\sqrt{5}}$

4. $\frac{(1+\sqrt{5})^2-(1-\sqrt{5})^2}{4\sqrt{5}}$

โจทย์ทบทวน

จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

1. $\sqrt[3]{27a^4}+3\sqrt[3]{8a}-\frac{3}{a}\sqrt[3]{125a^7}$
2. $\sqrt[5]{a^2b^2}+\sqrt[5]{32b^7}-3a\sqrt[5]{b^2}$
3. $b\sqrt[3]{a^3b}+a\sqrt[3]{b^4}-2\sqrt[3]{a^3b^4}$
4. $\frac{1}{2m}\sqrt[4]{32m^5}+2\frac{1}{3}\sqrt[4]{162m}-\sqrt[4]{2m}$
5. $(a^2-b^2)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}-\sqrt{(a+b)^3(a-b)}+\frac{b}{a-b}\sqrt{a^2b^2-b^4}$
6. $\sqrt{2x^2+4x+2}-\sqrt{9y^2-18y+9}+\sqrt{2x^2-4x+2}-\sqrt{9y^2+18y+9}$

จงทำผลคูณให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1. $(2\sqrt{12}-\sqrt{75})\sqrt{3}$
2. $(5\sqrt{0.02}+\sqrt{8})\sqrt{2}$
3. $(3\sqrt{\frac{2}{3}}-6\sqrt{\frac{3}{8}}+4\sqrt{\frac{3}{2}})\sqrt{\frac{2}{3}}$
4. $(15\sqrt[3]{36}-6\sqrt[3]{\frac{9}{4}}+18\sqrt[3]{\frac{16}{81}})\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$
5. $(4+\sqrt{6})(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})$
6. $(6\sqrt{3x}-3\sqrt{5})(6\sqrt{3x}+3\sqrt{5})$
7. $(5+\sqrt{15})(5-\sqrt{15})$
8. $(\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2})(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})$
9. $(\sqrt[3]{16}+4\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{54})(3\sqrt[3]{\frac{1}{2}}+5\sqrt[3]{4})$
10. $(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})$
11. $(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})$
12. $(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{16})(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{16})$
13. $(\sqrt[4]{10}-\sqrt[4]{5})(\sqrt[4]{10}+\sqrt[4]{5})$
14. $\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}}\times\sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}$
15. $\sqrt[5]{17+\sqrt{46}}\times\sqrt[5]{17-\sqrt{46}}$
16. $(\sqrt{9}-\sqrt{15}+\sqrt{25})(\sqrt{3}+\sqrt{5})$
17. $(\sqrt{11}-\sqrt{3})(11+\sqrt{33}+3)$
18. $(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})$
19. $(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2})$
20. $(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})$
21. $(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2})(\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{x^2y^2}+\sqrt[3]{y^4})$

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

บทนิยาม เมื่อ a เป็นจำนวนจริง n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 และ a มีรากที่ $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

จากบทนิยาม จะได้ว่า $a^{\frac{1}{n}}$ เป็นค่าหลักของรากที่ n ของ a และจะได้ว่า $(a^{\frac{1}{n}})^n = a$

ตัวอย่างที่ 24 $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4}$ และ $\left(4^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 4$

$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}$ และ $\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 8$

บทนิยาม ให้ a เป็นจำนวนจริง m และ n เป็นจำนวนเต็มที่ $n>1$ และ $\frac{m}{n}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

จะได้ว่า

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n = \sqrt[n]{a^m}$$

ตัวอย่างที่ 25 จากบทนิยาม $2^{\frac{2}{3}} = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2$

และ $2^{\frac{2}{3}} = \left(2^2\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$

หมายเหตุ จากบทนิยามของ $a^{\frac{m}{n}}$ ถ้า $m<0$ แล้ว a ต้องไม่เป็น 0

เช่น $a=0$, $m=-1$ และ $n=2$

จะได้ $a^{\frac{m}{n}} = 0^{\frac{-1}{2}} = (0^{\frac{1}{2}})^{-1} = 0^{-1} = \frac{1}{0}$ ซึ่ง $\frac{1}{0}$ ไม่มีความหมายทางคณิตศาสตร์

ตัวอย่างที่ 26 จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเลขยกกำลัง

1.) $\sqrt{3}$ = ... 2.) $\sqrt[3]{3^2}$ = ... 3.) $\sqrt[5]{3x^3y^2}$ = ...

4.) $\sqrt[4]{5x^2y}$ = ... 5.) $\sqrt[6]{7x^5}$ = ... 6.) $\sqrt[7]{19x^5y^3}$ = ...

ตัวอย่างที่ 27 จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปกรณฑ์

1.) $16^{\frac{1}{4}}$ = ... 2.) $7^{\frac{7}{5}}$ = ...

3.) $(-8)^{\frac{1}{3}}$ = ... 4.) $2^{\frac{1}{2}}$ = ...

5.) $5^{\frac{3}{4}}$ = ... 6.) $(3xy)^{\frac{2}{3}}$ = ...

7.) $(4x^2y)^{\frac{3}{5}}$ = ... 8.) $(13x^4y^3)^{\frac{2}{5}}$ = ...

ตัวอย่างที่ 28 จงหาค่าของเลขยกกำลังต่อไปนี้

1.) $(27)^{\frac{2}{6}}$ = ...

2.) $(-32)^{\frac{-4}{5}}$ = ...

3.) $(-2)^{\frac{4}{6}}$ = ...

สมบัติของเลขยกกำลัง ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็น 0 และ m, n เป็นจำนวนเต็ม จะได้

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ โดยที่ $b \neq 0$
5. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ โดยที่ $a \neq 0$

ตัวอย่างที่ 29 จงหาค่าของ $\left((125)^{\frac{1}{3}}\right)^2$ = ...

= .....

ตัวอย่างที่ 30 จงหาค่าของ $8^{\frac{3}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{4}}$ = ...

= .....

ตัวอย่างที่ 31 จงหาค่าของ $64^{\frac{5}{6}}$ = ...

= .....

ตัวอย่างที่ 32 จงหาค่าของเลขยกกำลังต่อไปนี้

1. $\left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$

2. $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{25}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$

3. $5^0+(0.25)^{\frac{1}{2}}+(8^{\frac{2}{3}})(2^{-2})-(\frac{1}{27})^{-\frac{2}{3}}$

4. $\frac{(2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}})^8}{(4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{6}})^6}$

5. $\left(\frac{8^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{6}}b^2c^{\frac{1}{3}}}{2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}c^{\frac{2}{3}}}\right)^3$

Worksheet 5 เรื่อง เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

1. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปกรณฑ์

1.1 $8^{\frac{1}{3}}$ = ...

1.2. $64^{\frac{1}{4}}$ = ...

1.3. $(-5)^{\frac{3}{4}}$ = ...

1.4. $(-243)^{\frac{1}{5}}$ = ...

1.5. $(27)^{\frac{2}{3}}$ =.....

1.6. $16^{\frac{3}{4}}$ =.....

1.7. $(144)^{\frac{3}{2}}$ =.....

2. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเลขยกกำลัง

2.1 $\sqrt[3]{6^2}$ =.....

2.2 $\sqrt[4]{\frac{1}{256}}$ = ...

2.3 $\sqrt[4]{64^3}$ = ...

2.4 $\sqrt[3]{512}$ = ...

2.5 $\sqrt[3]{-125}$ = ...

2.6 $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$ = ...

3. จงหาค่าจำนวนต่อไปนี้

3.1 $(81)^{\frac{3}{4}}$ = ...

3.2 $(1024)^{\frac{2}{5}}$ = ...

3.3 $\left[(-8)^4\right]^{\frac{1}{6}}$ = ...

4. จงหาค่าของเลขยกกำลังต่อไปนี้

4.1 $\left(\frac{27}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$

4.2 $\left(\frac{625}{81}\right)^{\frac{3}{4}}$

4.3 $\left(-\frac{243}{32}\right)^{-\frac{2}{5}}$

4.4 $\left(\frac{256}{625}\right)^{\frac{3}{4}}$

4.5 $\left(-\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}}$

4.6 $\left(\frac{1}{144}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{343}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$

4.7 $(0.125)^{\frac{1}{3}} - (16)^{\frac{3}{4}} + (17^0) - (\frac{1}{81})^{-\frac{3}{4}}$

4.8 $\frac{(9a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{5}{4}})^4}{(3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{9}})^9}$

4.9 $\frac{(8a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}c^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{6}}}{(4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{5}})^{\frac{1}{4}}}$

รูปแบบรากที่ควรทราบ : รากของจำนวนที่ติดราก

รูปแบบ $\sqrt{(a+b)\pm 2\sqrt{ab}}$ ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกจะได้ $(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2 = a\pm 2\sqrt{ab}+b$

$= (a+b)\pm 2\sqrt{ab}$

ทฤษฎีบท ให้ $x=a+b$, $y=ab$

ดังนั้น รากที่สองของ $x\pm 2\sqrt{y}$ = รากที่สองของ $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$= \pm(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})$

และ $\sqrt{(a+b)\pm 2\sqrt{ab}}$ หรือ $\sqrt{x\pm 2\sqrt{y}}$ = $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$

หลัก 1. ต้องหาจำนวนจริง a และ b ซึ่งทำให้ $x=a+b$, $y=ab$

2. รากที่สองของ $x\pm 2\sqrt{y}$ คือ $\pm(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})$

3. $\sqrt{x\pm 2\sqrt{y}}$ มีคำตอบเดียวคือ $\left|\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right|$

ตัวอย่างที่ 33 จงหาค่าต่อไปนี้

โจทย์	หา a,b โดย $x=a+b$, $y=a\cdot b$	จะได้ $\sqrt{(a+b)\pm 2\sqrt{a\cdot b}}$	**คำตอบ =** $\pm(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})$
1. $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$	$a+b=4$ และ $ab=3$ $a=3$, $b=1$	= $\sqrt{(3+1)+2\sqrt{3\cdot 1}}$	= $\pm(\sqrt{3}+\sqrt{1})$ = $\sqrt{3}+\sqrt{1}$
2. $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$			
3. $\sqrt{12+2\sqrt{35}}$			
4. $\sqrt{13-2\sqrt{22}}$			
5. $\sqrt{16-2\sqrt{39}}$			
6. $\sqrt{11+2\sqrt{24}}$			
7. $\sqrt{17+2\sqrt{60}}$			
8. $\sqrt{24-2\sqrt{80}}$			

กรณีที่ไม่เข้าฟอร์ม $\sqrt{(a+b)\pm 2\sqrt{ab}}$

เนื่องจากถ้ารูปแบบไม่เข้าฟอร์ม เราจึงไม่สามารถหาค่าได้ จึงต้องเกิดการจัดรูปใหม่ได้ดังนี้

แบบที่ 1 หน้า $\sqrt{ab}$ มีตัวเลขมากกว่า 2 สามารถกระจายตัวทีเกินเข้าไปข้างใน $\sqrt{ab}$ ได้ เช่น

$\sqrt{18+8\sqrt{5}}$ =

แบบที่ 2 หน้า $\sqrt{ab}$ มีค่า 1 และ $\sqrt{ab}$ มีตัวร่วมสามารถดึงออกนอกรากได้ เช่น

$\sqrt{9-\sqrt{80}}$ =

แบบที่ 3 หน้า $\sqrt{ab}$ มีค่า 1 และ $\sqrt{ab}$ ไม่สามารถดึงตัวร่วมออกมาได้ จัดการโดยคูณ 2 เข้าไปทั้งเศษและส่วน เช่น

$\sqrt{4-\sqrt{15}}$ =

แบบฝึกหัด (แสดงวิธีทำลงสมุด)

1. $\sqrt{22-2\sqrt{105}}$
2. $\sqrt{17+2\sqrt{72}}$
3. จงหารากที่สองของ $11-2\sqrt{24}$
4. $\sqrt{18+8\sqrt{5}}$
5. $\sqrt{12+6\sqrt{3}}$
6. $\sqrt{\sqrt{32}-\sqrt{24}}$

Worksheet 6 เรื่อง รากของจำนวนที่ติดราก

1. จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

1.) $\sqrt{13+2\sqrt{30}}$

2.) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

3.) $\sqrt{9-2\sqrt{20}}$

4.) $\sqrt{13-4\sqrt{10}}$

5.) รากที่สองของ $8-4\sqrt{3}$

6.) รากที่สองของ $8+2\sqrt{7}$

7.) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

8.) $\sqrt{6-\sqrt{35}}$

การแก้สมการที่มีเครื่องหมายกรณฑ์

การแก้สมการหาคำตอบของสมการในรูปเครื่องหมายกรณฑ์ จะมีหลักในการแก้ดังนี้

1. ถ้ากรณีเป็นรากที่สอง จะใช้วิธียกกำลังสองทั้งสองข้างเพื่อทำลาย "$\sqrt{}$" เช่น $(\sqrt{a})^2=a$

2. ถ้าเป็นรากที่มากกว่า 2 ให้ใช้วิธีการยกกำลังตามลำดับของราก เพื่อทำลายราก

เช่น $(\sqrt[4]{a})^4=a$, $(\sqrt[10]{a})^{10}=a$ เป็นต้น

3. เมื่อกำจัดรากแล้ว ก็แก้สมการหาค่าตัวแปร โดยวิธีการทั่วๆไป

ตัวอย่างที่ 34 จงหาค่า x จากสมการ $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=-2$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 35 จงหาค่า x จากสมการ $\sqrt{x-3}=\sqrt{x}-3$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 36 จงหาค่า x จากสมการ $\sqrt{x-12}+\sqrt{x}=2$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 37 จงหาค่า x จากสมการ $\sqrt{3x+7} = x+1$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 38 จงหาค่า x จากสมการ $\sqrt{\frac{2x}{x+1}}+\sqrt{\frac{x+1}{2x}} = 2$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 39 จงหาค่า x จากสมการ $y^2 - y - 3 - 2\sqrt{y^2 - y - 21} = 21$

วิธีทำ

แบบฝึกหัด จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้ (แสดงวิธีทำลงสมุด)

1. $\sqrt{x+7} = x-5$
2. $\sqrt{5x+15} - \sqrt{2x+5} = \sqrt{3x-2}$
3. $2\sqrt{3x+6} = \sqrt{4x+104}$
4. $\sqrt{5x+1} + 6 = 10$
5. $\sqrt{2x+1} = \sqrt{x+1}$
6. $\sqrt{11-x} - \sqrt{x+14} = -1$
7. $\sqrt{x+3} = 1 + \sqrt{2-x}$
8. $\sqrt{3x+4} - \sqrt{3x-5} = 1$
9. $\sqrt{x+7} = \sqrt{3x+1}$
10. $-\sqrt{x^2+21} = x+2$

การแก้สมการที่อยู่ในรูปเลขยกกำลัง

การแก้สมการที่อยู่ในรูปเลขยกกำลัง สามารถทำได้โดยการปรับฐานของเลขยกกำลังให้เท่ากันหรือการปรับเลขชี้กำลังของเลขยกกำลังให้เท่ากัน โดยใช้สมบัติต่างๆ ของเลขยกกำลังมาช่วยในการปรับให้เท่ากัน

ซึ่งหลักที่สำคัญคือ **ต้องทำให้ฐานของเลขยกกำลัง ของทั้งสองข้างให้เท่ากันจากนั้นจับกำลังให้เท่ากัน**

ดังสมบัติต่อไปนี้ สมบัติของเลขยกกำลัง เมื่อ $a,b>0$ และ $a\neq1$, $b\neq1$

ถ้า $a^x = a^y$ **แล้ว** $x=y$

สมบัติของเลขยกกำลังเพิ่มเติม

1. $(a^m)^n = (a^{mn}) = (a^n)^m$
2. $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ และ $b^n=\frac{1}{b^{-n}}$
3. $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$

ตัวอย่างที่ 40 จงหาค่า x จากสมการต่อไปนี้

1. $2^x=4$
2. $2^x=\frac{1}{8}$
3. $2^x=1$
4. $2^x=-4$
5. $3^x=\frac{1}{81}$
6. $5^x=125$
7. $7^x=-49$
8. $2^x=5^x$

ตัวอย่างที่ 41 จงหาค่า x จากสมการ $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = \frac{3}{2}$

ตัวอย่างที่ 42 จงหาค่า x จากสมการ $3^{x+1} = 7^{x+1}$

ตัวอย่างที่ 43 จงหาค่า x จากสมการ $10^{2x} = 0.0001$

ตัวอย่างที่ 44 จงหาค่า x จากสมการ $81^{x} = 729$

ตัวอย่างที่ 45 จงหาค่า x จากสมการ $16^{x} = 1024$

ตัวอย่างที่ 46 จงหาค่า x จากสมการ $\left(\frac{4}{9}\right)^{3x} = \frac{64}{729}$

ตัวอย่างที่ 47 จงหาค่า x จากสมการ $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{226}\right)^{-2}$

ตัวอย่างที่ 48 จงหาค่า x จากสมการ $(3)^{2x-x^2} = \frac{1}{27}$

ตัวอย่างที่ 49 จงหาค่า x จากสมการ $\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}\right)^{2x-4} = (\sqrt{5}+\sqrt{3})^{x^2-2x}$

ตัวอย่างที่ 50 จงหาค่า x จากสมการ $9^{x+2} - 6(9^{x+1}) = 3^{4x}$

แบบฝึกหัด จงหาค่า x ที่ทำให้สมการเป็นจริง

1. $5^{2x-3} = \frac{1}{25}$
2. $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-1} = \left(\frac{4}{9}\right)^{-5}$
3. $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{2x+3}{2}} = \left(\frac{4}{25}\right)^{-8}$
4. $2^{3-2x} = 3^{6-4x}$
5. $\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^{3x+2} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\right)^{4}$
6. $10^{-3x+5} = \frac{1}{1000^3}$

การประยุกต์ของเลขยกกำลัง

อัตราเงินเฟ้อคือ ภาวะที่ราคาสินค้าและบริการโดยทั่วไปในระบบเศรษฐกิจสูงขึ้นเรื่อย ๆ ซึ่งก็จะมีผลทำให้ค่าของเงินที่เราถืออยู่ลดลง

<u>การคำนวณหาอัตราเงินเฟ้อ</u>

โดยใช้สูตร $$r = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

เมื่อ r แทนอัตราเงินเฟ้อ

p แทนราคาสินค้าเมื่อ n ปีที่แล้ว

q แทนราคาชนิดเดียวกันในเวลาปัจจุบัน

n แทนจำนวนปี

ตัวอย่างที่ 51 จงหาอัตราเงินเฟ้อจากราคาที่ดินแปลงหนึ่ง ซึ่งปัจจุบันราคา 500,000 บาท โดยเมื่อ 12 ปีที่แล้วที่ดินแปลงนี้ราคา 80,000 บาท

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

<u>การคำนวณอัตราดอกเบี้ยเงินกู้</u>

โดยใช้สูตร $A = P(1+r)^t$

เมื่อ A แทนจำนวนเงินต้นพร้อมดอกเบี้ย

P แทนเงินต้น

r แทนอัตราดอกเบี้ยเงินกู้ต่อปี

t แทนจำนวนปีที่

ตัวอย่างที่ 52 บริษัทกู้เงินจากธนาคารจำนวน 900,000 บาท โดยจะต้องจ่ายดอกเบี้ยเงินกู้ 8.5% ต่อปี ถ้าธนาคารยอมให้บริษัทยังไม่ต้องจ่ายดอกเบี้ย โดยให้ผ่อนชำระเงินต้นอย่างเดียว แต่ต้องจ่ายดอกเบี้ยดังกล่าวเมื่อครบ 2 ปี 6 เดือน อยากทราบว่า บริษัทแห่งนี้จะต้องจ่ายดอกเบี้ยเงินกู้เท่าใด เมื่อครบกำหนด

วิธีทำ .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....