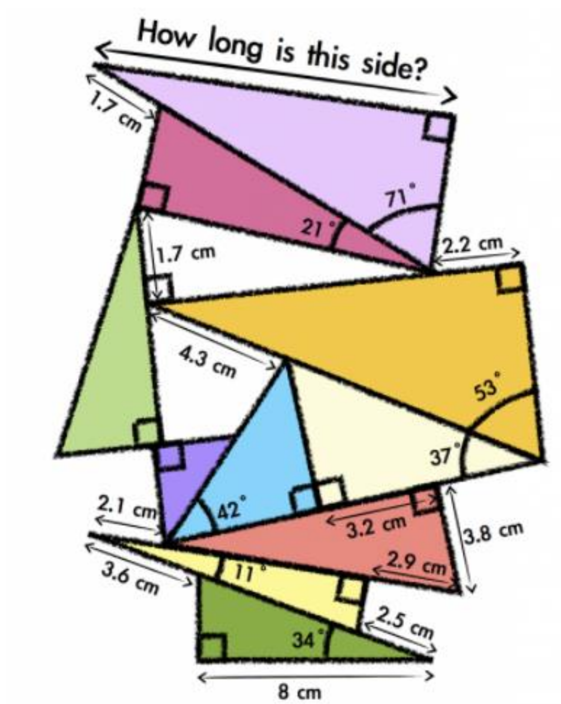
เอกสารประกอบการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ 3 (ค32101)

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2560

เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ



ชื่อ-นามสกุล ....

ชั้น ม.5 ห้อง............................ เลขที่ ....

โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

อัตราส่วนตรีโกณมิติ (Trigonometry ratios)

ความหมายของตรีโกณมิติ

ตรีโกณมิติ หมายถึง วิทยาศาสตร์วิเคราะห์ (Analytic Science) จุดเริ่มต้นของวิชานี้เริ่มในศตวรรษที่ 17 หลังจากได้พัฒนาสัญลักษณ์ของพีชคณิต

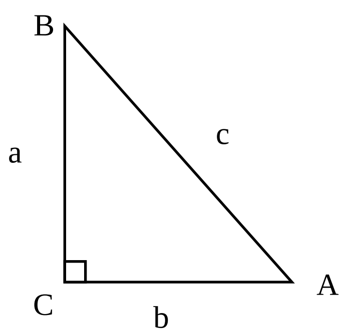
ตรีโกณมิติ หมายถึง เรขาคณิตที่เกี่ยวกับดาราศาสตร์ ซึ่งเกี่ยวกับการวัดมุม ต้นกำเนิดวิชานี้อาจจะขึ้นอยู่ที่ผลงานของ ฮิปพาร์คัส (Hipparchus)

อัตราส่วนรูปสามเหลี่ยม

ชาวอียิปต์โบราณทำการวัดฐานของพีระมิดโดยการแบ่งเส้นเชือกออกเป็น 12 ส่วนเท่าๆกัน แล้วทำเชือกให้เป็นปมตรงส่วนที่แบ่งนั้น แล้วดึงให้ตึงเป็นรูปสามเหลี่ยม ด้วยอัตราส่วนของด้าน 3 : 4 : 5 และมุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านที่ยาวที่สุดจะเป็นมุมฉากเสมอจึงเป็นที่น่าเชื่อได้ว่าทฤษฎีปีทากอรัสเป็นที่รู้จักกันมาแพร่หลายแล้ว

ทฤษฎีบทปีทากอรัส ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ด้านตรงข้ามมุมฉากยกกำลังสองมีค่าเท่ากับผลบวกของกำลังสองของอีกสองด้าน

พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



จะได้ว่า $a^2 + b^2 = c^2$ **หรือ** $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

a แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุม A

b แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุม B

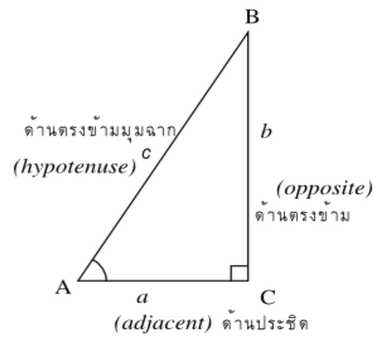
c แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุม C

ด้านชุดที่พบบ่อย

3, 4, 5	11, 60, 61	28, 45, 53
5, 12, 13	12, 35, 37	33, 56, 65
7, 24, 25	13, 84, 85	36, 77, 85
8, 15, 17	16, 63, 65	39, 80, 89
9, 40, 41	20, 21, 29	48, 55, 73

1. อัตราส่วนตรีโกณมิติ (Trigonometric ratio)

อัตราส่วนตรีโกณมิติ หมายถึง อัตราส่วนระหว่างความยาวของด้านทั้งสองด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยวิธีการเรียกด้านทั้งสามในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยจะอิงกับ **“<u>มุมที่สนใจ</u>”**

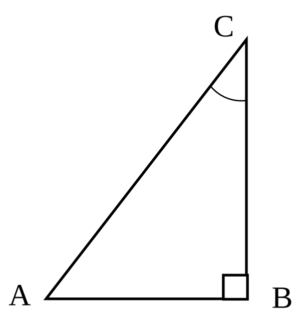


เช่น ถ้า สนใจมุม A จะเรียก ด้านตรงข้ามมุม A ว่า “**ข้าม**”

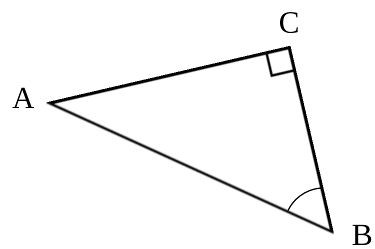
ด้านประชิดมุม A ว่า “**ชิด**”

ถ้า สนใจมุม B จะเรียก ด้านตรงข้ามมุม B ว่า “.....................”

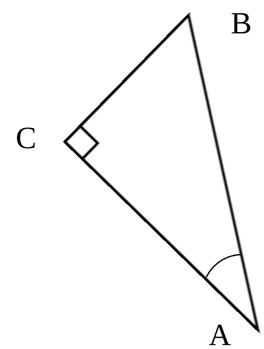
ด้านประชิดมุม B ว่า “.....................”



สนใจมุม C



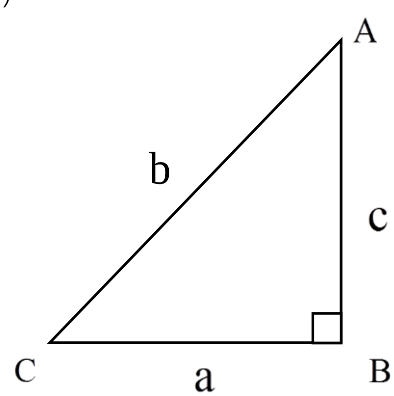
สนใจมุม B



สนใจมุม A

ตัวอย่างที่ 1 จงเรียกด้านแต่ละด้านต่อไปนี้เทียบกับมุมที่กำหนดให้พร้อมกับความยาวด้าน

1)



$\overline{AC}$ ว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก ยาว .... หน่วย

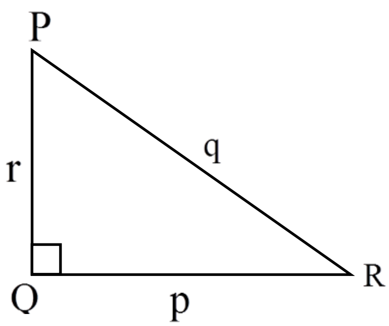
$\overline{BC}$ ว่า ด้านตรงข้ามมุม A ยาว .... หน่วย

$\overline{AB}$ ว่า .... ยาว .... หน่วย

$\overline{BC}$ ว่า .... ยาว .... หน่วย

$\overline{AB}$ ว่า .... ยาว .... หน่วย

2)



$\overline{PR}$ ว่า .... ยาว .... หน่วย

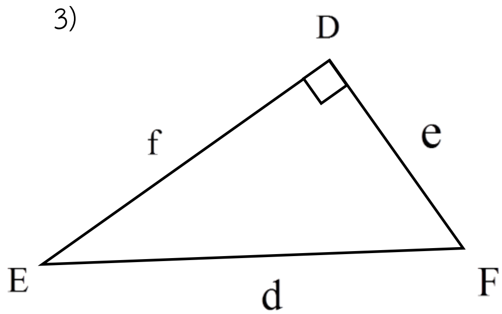
$\overline{PQ}$ ว่า .... ยาว .... หน่วย

$\overline{RQ}$ ว่า .... ยาว .... หน่วย

$\overline{PQ}$ ว่า .... ยาว .... หน่วย

$\overline{RQ}$ ว่า .... ยาว .... หน่วย

3)



$\overline{EF}$ ว่า .... ยาว .... หน่วย

$\overline{DF}$ ว่า .... ยาว .... หน่วย

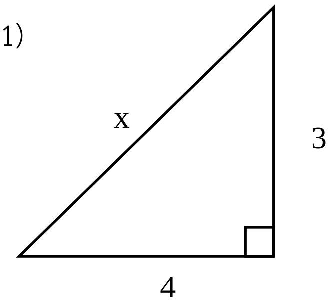
$\overline{DE}$ ว่า .... ยาว .... หน่วย

$\overline{DF}$ ว่า .... ยาว .... หน่วย

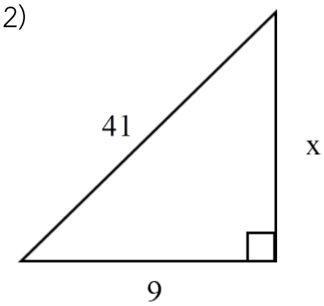
$\overline{DE}$ ว่า .... ยาว .... หน่วย

ตัวอย่างที่ 2 จงหาความยาวด้านที่เหลือ (x) ของสามเหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้

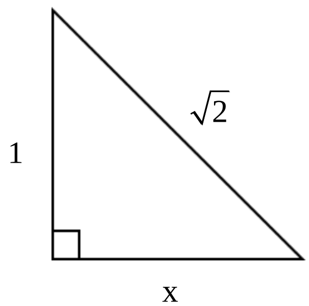
1)



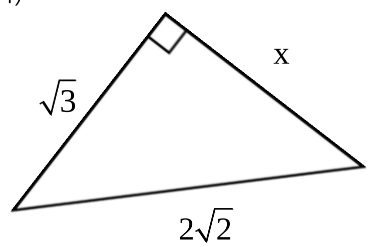
2)



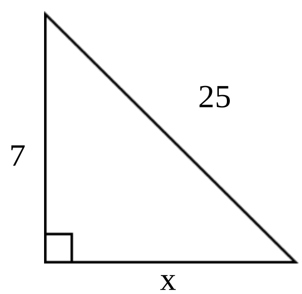
3)



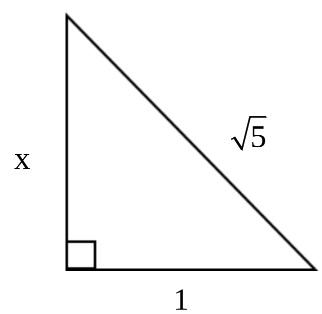
4)



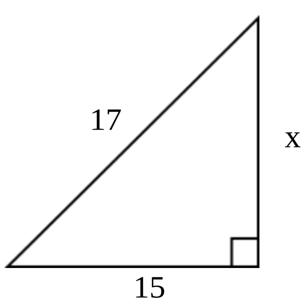
5)



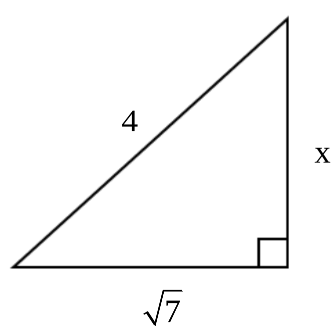
6)



7)



8)



บทนิยาม อัตราส่วนตรีโกณมิติ

sine A (ไซน์ของมุม A) เขียนย่อว่า $\sin A$ เขียนแทนด้วย

นั่นคือ $\sin A = \dfrac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

sin = ...

cosine A (โคไซน์ของมุม A) เขียนย่อว่า $\cos A$ เขียนแทนด้วย

นั่นคือ $\cos A = \dfrac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

cos = ...

tangent A (แทนเจนต์ของมุม A) เขียนย่อว่า $\tan A$ เขียนแทนด้วย

นั่นคือ $\tan A = \dfrac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}$

tan = ...

อัตราส่วนตรีโกณมิติ $\sin, \cos$ และ $\tan$ ที่เป็นอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมภายในรูปสามเหลี่ยม นอกจากอัตราส่วนตรีโกณมิติทั้ง 3 ยังมีอัตราส่วนตรีโกณมิติ 3 อัตราส่วนที่สำคัญเช่นกัน ดังนี้

cosecant A (โคเซแคนต์ของมุม A) เขียนย่อว่า $\operatorname{cosec} A$ หรือ $\csc A$ เป็นส่วนกลับของ $\sin A$

นั่นคือ $\operatorname{cosec} A = \dfrac{1}{}$ เมื่อ $\sin A \neq 0$

cosec = ...

secant A (เซกแคนต์ของมุม A) เขียนย่อว่า $\sec A$ เป็นส่วนกลับของ $\cos A$

นั่นคือ $\sec A = \dfrac{1}{}$ เมื่อ $\cos A \neq 0$

sec = ...

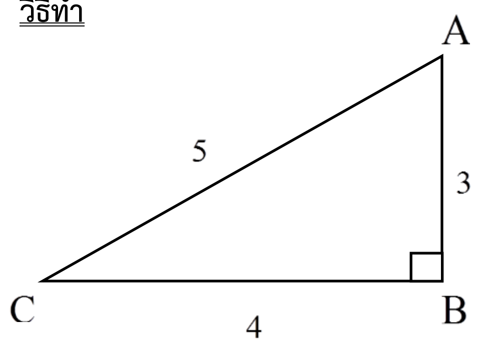
cotangent A (โคแทนเจนต์ของมุม A) เขียนย่อว่า $\cot A$ เป็นส่วนกลับของ $\tan A$

นั่นคือ $\cot A = \dfrac{1}{}$ เมื่อ $\tan A \neq 0$

cot = ...

ตัวอย่างที่ 3 สามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม C เป็นมุมฉากดังรูป

<u>**วิธีทำ**</u>



จงหา 1) $\sin A$ = ... $\cos A$ = ...

$\tan A$ = ... $\operatorname{cosec} A$ = ...

$\sec A$ = ... $\cot A$ = ...

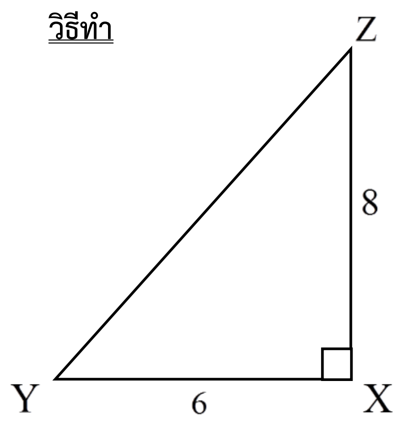
2) $\sin B$ = ... $\cos B$ = ...

$\tan B$ = ... $\operatorname{cosec} B$ = ...

$\sec B$ = ... $\cot B$ = ...

ตัวอย่างที่ 4 รูปสามเหลี่ยม XYZ มีมุม X เป็นมุมฉาก ดังรูป

<u>**วิธีทำ**</u>



จงหา 1) $\sin Y$ = ... $\cos Y$ = ...

$\tan Y$ = ... $\operatorname{cosec} Y$ = ...

$\sec Y$ = ... $\cot Y$ = ...

2) $\sin Z$ = ... $\cos Z$ = ...

$\tan Z$ = ... $\operatorname{cosec} Z$ = ...

$\sec Z$ = ... $\cot Z$ = ...

ตัวอย่างที่ 5 รูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม B เป็นมุมฉาก ถ้า $AB = 5, AC = 13$ จงหา

<u>วิธีทำ</u>

1) $\sin A$ = ... $\cos A$ = ...

$\tan A$ = ... $\operatorname{cosec} A$ = ...

$\sec A$ = ... $\cot A$ = ...

2) $\sin C$ = ... $\cos C$ = ...

$\tan C$ = ... $\operatorname{cosec} C$ = ...

$\sec C$ = ... $\cot C$ = ...

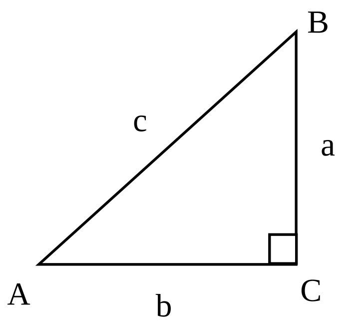
ตัวอย่างที่ 6 กำหนดให้ $\sin A = \frac{4}{5}$ จงหา $\operatorname{cosec} A$, $\cos A$ และ $\tan A$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้ ABC มีมุม C เป็นมุมฉาก ถ้า $\cos A = 2$ จงหา $\sin B + \cos A$

<u>วิธีทำ</u>

ความสัมพันธ์ในรูปเศษส่วน



$$\sin A = \frac{a}{c}$$
$$\cos A = \frac{b}{c}$$
$$\tan A = \frac{a}{b}$$

$$\frac{\sin A}{\cos A} =$$
$$\frac{\cos A}{\sin A} =$$

นั่นคือ $\tan A =$ และ $\cot A =$

1.2 กำลังสองของของฟังก์ชั่นตรีโกณมิติ

$(\sin A)^2$ เขียนแทนด้วย $\sin^2 A$

$(\cos A)^2$ เขียนแทนด้วย $\cos^2 A$

$(\tan A)^2$ เขียนแทนด้วย $\tan^2 A$

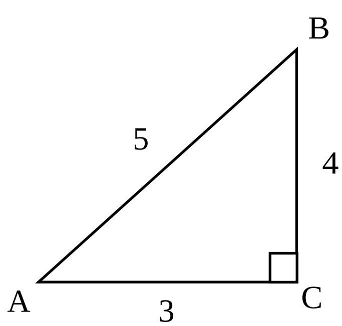
หมายเหตุ $(\sin A)^2 \neq \sin\left(A^2\right)$

$(\cos A)^2 \neq \cos\left(A^2\right)$

$(\tan A)^2 \neq \tan\left(A^2\right)$

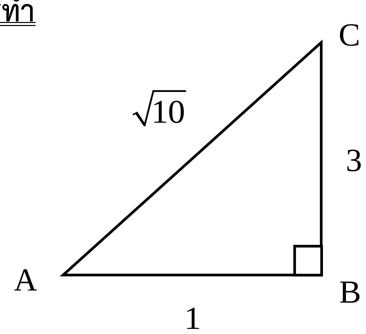
ตัวอย่างที่ 8 จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC จงหา $\sin^2 A$, $\cos^2 A$ และ $\tan^2 A$

<u>**วิธีทำ**</u>



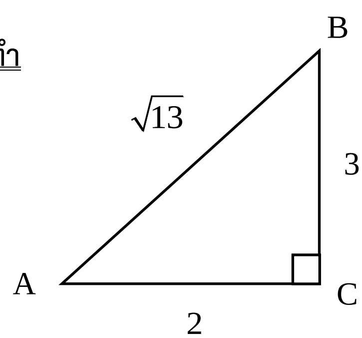
ตัวอย่างที่ 9 จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC จงหาค่าของ $\sin^2 A + \cos^2 A + \tan^2 C$

<u>วิธีทำ</u>



ตัวอย่างที่ 10 จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC จงหาค่าของ x จากสมการ $x\sin^2 A + \cos^2 B = \frac{9}{13}\tan^2 B$

<u>วิธีทำ</u>

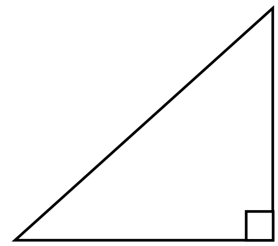


1.3 การหาค่าฟังก์ชั่นตรีโกณโดยกำหนดค่าฟังก์ชั่นของมุมอื่น

วิธีการแก้ปัญหา ทำโดยนำค่าฟังก์ชั่นของมุมนั้นๆมาเขียนสามเหลี่ยมมุมฉากพร้อมกับใส่มุมใส่ด้านลงไปตามนิยามของฟังก์ชั่นตรีโกณมิติของสามเหลี่ยมมุมฉากแล้วหาด้านที่เหลือ

ตัวอย่างที่ 11 สามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ใดๆ จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติที่เหลือ

1) $\sin A = \frac{3}{5}$



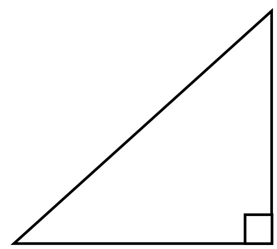
__วิธีทำ__

$\operatorname{cosec} A$ = ...

$\cos A$ = ... $\sec A$ = ...

$\tan A$ = ... $\cot A$ = ...

2) $\tan B = \frac{1}{3}$



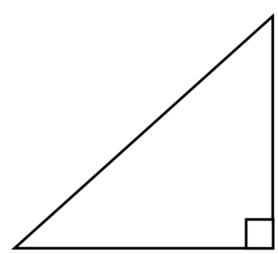
__วิธีทำ__

$\cot B$ = ...

$\sin B$ = ... $\operatorname{cosec} B$ = ...

$\cos B$ = ... $\sec B$ = ...

3) $\cot C = \frac{24}{7}$



__วิธีทำ__

$\tan C$ = ...

$\sin C$ = ... $\operatorname{cosec} C$ = ...

$\cos C$ = ... $\sec C$ = ...

ตัวอย่างที่ 12 สามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่ง $\sin A = 0.6$ จงหาค่าของ $2\tan A + 3\sec A$

<u>**วิธีทำ**</u>

ตัวอย่างที่ 13 สามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่ง $\tan A = 3$ จงหาค่าของ $3\sin^2 A + 4\cos^2 A$

<u>**วิธีทำ**</u>

ตัวอย่างที่ 14 สามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่ง $\sec A = 2$ จงหาค่าของ $\cot^2 A + \sqrt{3}\,\mathrm{cosec}\, A$

<u>**วิธีทำ**</u>

Worksheet 1 อัตราส่วนตรีโกณมิติ

1. กำหนดให้ $8\sec A = 17$ จงหา $\sin A$, $\cos A$ และ $\tan A$

2. รูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม C เป็นมุมฉาก ถ้า $\operatorname{cosec} A = 2$ จงหา

   1) $\sin B + \cos A$

   2) $\cos A - \cos B$

3. รูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม A เป็นมุมฉาก ถ้า $\sec C = \sqrt{3}$ จงหา

   1) $\cot B \tan C$ 2) $\sec^2 B$ 3) $\dfrac{\csc C}{\csc B}$

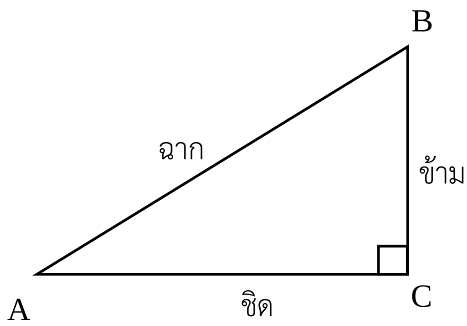
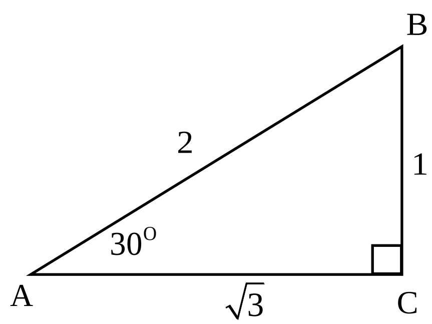
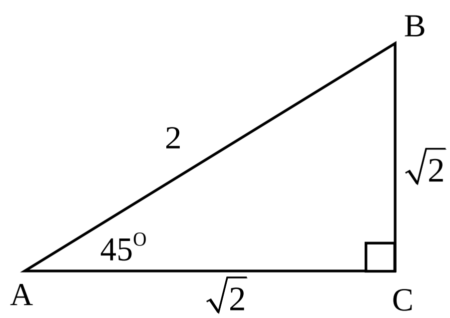
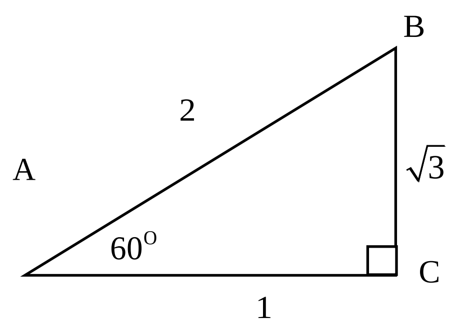
4. สามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่ง $\cot \mathrm{A} = 2.4$ จงหาค่าของ $2\sin \mathrm{A} \cos \mathrm{A}$

5. สามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่ง $5\cos \mathrm{A} = 3$ จงหาค่าของ $3\tan \mathrm{A} \operatorname{cosec} \mathrm{A}$

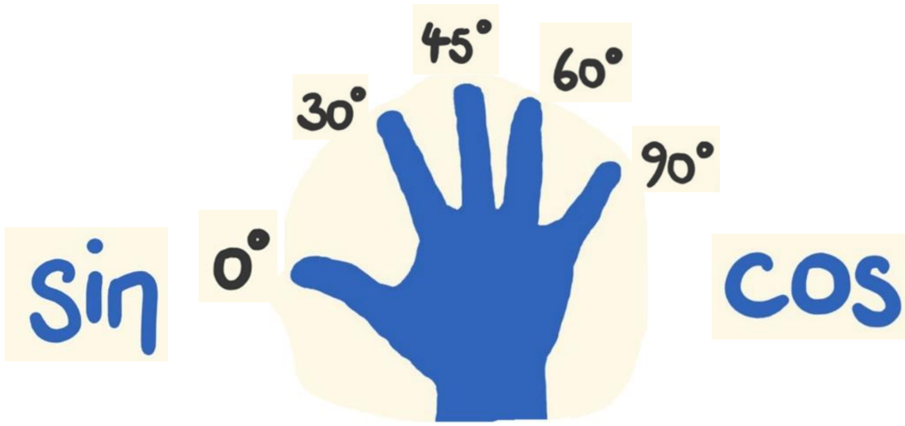
6. สามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่ง $24\operatorname{cosec} \mathrm{A} = 25$ จงหาค่าของ $5\cot \mathrm{A} \sec \mathrm{A}$

2. ค่าฟังก์ชั่นตรีโกณมุมที่ควรทราบ

ค่าฟังก์ชั่นตรีโกณมิติของมุมที่น่าสนใจ มี $30^\circ, 45^\circ$ และ 60° ซึ่งในสมัยโบราณได้สร้างตารางแสดงอัตราส่วนของฟังก์ชั่นตรีโกณมิติของสามเหลี่ยมมุมฉากของมุม $30^\circ, 45^\circ$ และ 60° ไว้ดังนี้

รูปสามเหลี่ยม	มุม	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$
	A			
	30°			
	45°			
	60°			

หาค่าฟังก์ชั่นตรีโกณด้วยหลักมือซ้าย



ตารางแสดงค่าฟังก์ชั่นตรีโกณมิติของมุม $30^\circ, 45^\circ$ **และ** 60°

	0°	30°	45°	60°	90°
sin A					
cos A					
tan A					

ตัวอย่างที่ 15 จงหาค่า $\cos 30^{\circ} \cdot \tan 60^{\circ} + \sin 30^{\circ} \cdot \tan 45^{\circ}$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่างที่ 16 จงหาค่า $(\sin 60^{\circ})(\tan 30^{\circ})(\sec 60^{\circ}) + (\cot 45^{\circ})(\operatorname{cosec} 30^{\circ})$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่างที่ 17 จงหาค่า $\sin^2 45^{\circ}\ \cos^2 60^{\circ} + \cot^2 60^{\circ}\ \sin^2 30^{\circ}$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่างที่ 18 จงหาค่า $2\sin 30^{\circ}\cdot\cos 30^{\circ}\cdot\cot 60^{\circ}$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 19 จงหาค่า $\tan^2 60^{\circ}+4\cos^2 45^{\circ}+3\sec^2 30^{\circ}$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 20 จงหาค่า $\dfrac{\tan^2 30^{\circ}\cos^2 60^{\circ}+\tan^2 60^{\circ}\sin^2 30^{\circ}}{6\sin 45^{\circ}\cos 45^{\circ}}$

วิธีทำ

Worksheet 2 : ค่าฟังก์ชั่นตรีโกณมุมที่ควรทราบ

1. จงหาค่า $\frac{1}{3}\sin^2 60^{\circ} - \frac{1}{2}\sec 60^{\circ}\ \tan^2 30^{\circ} + \frac{4}{3}\sin^2 45^{\circ}\ \tan^2 60^{\circ}$

2. จงหาค่า $\tan^2 45^{\circ} \cdot \sin 60^{\circ} \cdot \tan 30^{\circ} \cdot \tan^2 60^{\circ}$

3. จงหาค่า $\cot^2 45^{\circ} + \cos 60^{\circ} - \sin^2 60^{\circ} - \frac{3}{4}\cot^2 60^{\circ}$

4. จงหาค่า $3\tan^2 30^\circ + \frac{4}{3}\cos^2 30^\circ - \frac{1}{2}\cos^2 45^\circ - \frac{1}{3}\sin^2 60^\circ$

5. จงหาค่า $\sin^2 60^\circ - \frac{1}{2}\sec^2 60^\circ \cdot \tan^2 30^\circ + \frac{4}{3}\sin^2 45^\circ \cdot \tan^2 60^\circ$

6. จงหาค่า $3\tan^2 60^\circ + \frac{4}{3}\cos^2 30^\circ - \frac{1}{2}\cot^3 45^\circ - \frac{2}{3}\sin^2 60^\circ \cdot \frac{2}{3}\sec^4 60^\circ$

7. จงหาค่า $\cot^2 30^\circ - 2\cos^2 60^\circ - \frac{3}{4}\sec^2 45^\circ - 4\sin^2 30^\circ$

8. จงหาค่า $\frac{10\sqrt{7\cot^2 45^\circ + 4\cos 60^\circ}}{3\cos 30^\circ \sec 60^\circ}$

9. จงหาค่า $\tan^2 30^\circ + 2\sin 60^\circ - \tan 60^\circ + \tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ$

3. ค่าฟังก์ชั่นตรีโกณของมุมใดๆ

ตารางแสดงค่าฟังก์ชั่นตรีโกณมิติของมุมระหว่าง 0 องศา ถึง 90 องศา

A (°)	sin	cos	tan
1	0.017	0.999	0.017
2	0.034	0.999	0.034
3	0.052	0.998	0.052
4	0.069	0.997	0.069
5	0.087	0.996	0.087
6	0.104	0.994	0.105
7	0.121	0.992	0.122
8	0.139	0.990	0.140
9	0.156	0.987	0.158
10	0.173	0.984	0.176
11	0.190	0.981	0.194
12	0.207	0.978	0.212
13	0.224	0.974	0.230
14	0.241	0.970	0.249
15	0.258	0.965	0.267
16	0.275	0.961	0.286
17	0.292	0.956	0.305
18	0.309	0.951	0.324
19	0.325	0.945	0.344
20	0.342	0.939	0.363
21	0.358	0.933	0.383
22	0.374	0.927	0.404
23	0.390	0.920	0.424
24	0.406	0.913	0.445
25	0.422	0.906	0.466
26	0.438	0.898	0.487
27	0.453	0.891	0.509
28	0.469	0.882	0.531
29	0.484	0.874	0.554
30	0.500	0.866	0.577
31	0.515	0.857	0.600
32	0.529	0.848	0.624
33	0.544	0.838	0.649
34	0.559	0.829	0.674
35	0.573	0.819	0.700
36	0.587	0.809	0.726
37	0.601	0.798	0.753
38	0.615	0.788	0.781
39	0.629	0.777	0.809
40	0.642	0.766	0.839
41	0.656	0.754	0.869
42	0.669	0.743	0.900
43	0.681	0.731	0.932
44	0.694	0.719	0.965
45	0.707	0.707	1.000

A (°)	sin	cos	tan
46	0.719	0.694	1.035
47	0.731	0.681	1.072
48	0.743	0.669	1.110
49	0.754	0.656	1.150
50	0.766	0.642	1.191
51	0.777	0.629	1.234
52	0.788	0.615	1.279
53	0.798	0.601	1.327
54	0.809	0.587	1.376
55	0.819	0.573	1.428
56	0.829	0.559	1.482
57	0.838	0.544	1.539
58	0.848	0.529	1.600
59	0.857	0.515	1.664
60	0.866	0.500	1.732
61	0.874	0.484	1.804
62	0.882	0.469	1.880
63	0.891	0.453	1.962
64	0.898	0.438	2.050
65	0.906	0.422	2.144
66	0.913	0.406	2.246
67	0.920	0.390	2.355
68	0.927	0.374	2.475
69	0.933	0.358	2.605
70	0.939	0.342	2.747
71	0.945	0.325	2.904
72	0.951	0.309	3.077
73	0.956	0.292	3.270
74	0.961	0.275	3.487
75	0.965	0.258	3.732
76	0.970	0.241	4.010
77	0.974	0.224	4.331
78	0.978	0.207	4.704
79	0.981	0.190	5.144
80	0.984	0.173	5.671
81	0.987	0.156	6.313
82	0.990	0.139	7.115
83	0.992	0.121	8.144
84	0.994	0.104	9.514
85	0.996	0.087	11.430
86	0.997	0.069	14.300
87	0.998	0.052	19.081
88	0.999	0.034	28.636
89	0.999	0.017	57.289

ตัวอย่างที่ 21 จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ด้วยการเปิดตารางตรีโกณมิติ

1) $\sin 22^\circ$	=	2) $\tan 42^\circ$	=	3) $\cos 34^\circ$	= ....
4) $\tan 56^\circ$	=	5) $\sin 10^\circ$	=	6) $\sin 77^\circ$	= ....
7) $\cos 44^\circ$	=	8) $\tan 86^\circ$	=	9) $\cos 15^\circ$	= ....
10) $\cos 82^\circ$	=	11) $\tan 5^\circ$	=	12) $\tan 72^\circ$	= ....
13) $\sin 3^\circ$	=	14) $\sin 88^\circ$	=	15) $\cos 25^\circ$	= ....

จากตารางที่ให้มามีเฉพาะฟังก์ชั่น $\sin, \cos$ และ $\tan$ เท่านั้น ถ้าต้องการหา $\mathrm{cosec}, \sec$ และ $\cot$ จึงจะใช้คุณสมบัติการเป็นส่วนกลับกับ ฟังก์ชั่น $\sin, \cos$ และ $\tan$ เข้ามาช่วยหา

ตัวอย่างที่ 22 จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ด้วยการเปิดตารางตรีโกณมิติ

1) $\mathrm{cosec}\, 22^\circ$	=	2) $\sec 43^\circ$	= ....
3) $\cot 72^\circ$	=	4) $\sec 65^\circ$	= ....
5) $\cot 12^\circ$	=	6) $\mathrm{cosec}\, 83^\circ$	= ....
7) $\sec 37^\circ$	=	8) $\cot 16^\circ$	= ....

ตัวอย่างที่ 23 จงหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้ด้วยการเปิดตารางตรีโกณมิติ

1) $\sin 22.5^\circ$ 2) $\tan 56.2^\circ$

3) $\cos 43.5^{\circ}$

4) $\sec 63.4^{\circ}$

5) $\cot 33.7^{\circ}$

6) $\operatorname{cosec} 82.8^{\circ}$

4. การหามุมเมื่อทราบค่าอัตราส่วนของฟังก์ชั่นตรีโกณมิติ

กรณีที่ 1 ➡ มุมที่ไม่ต้องเปิดตารางฟังก์ชั่นตรีโกณมิติ

ตัวอย่างที่ 24 กำหนด $0^{\circ} < x < 90^{\circ}$ จงหาค่าของมุม x ที่

1) $\sin x = \frac{1}{2} \rightarrow x =$............................. 2) $\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x =$.............................

3) $\tan x = \sqrt{3} \rightarrow x =$............................. 4) $\sec x = 2 \rightarrow x =$.............................

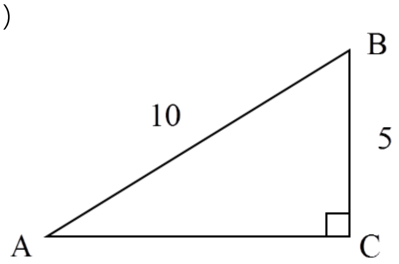
5) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x =$............................. 6) $\operatorname{cosec} x = \frac{2}{\sqrt{3}} \rightarrow x =$.............................

7) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x =$............................. 8) $\sec x = \frac{2}{\sqrt{3}} \rightarrow x =$.............................

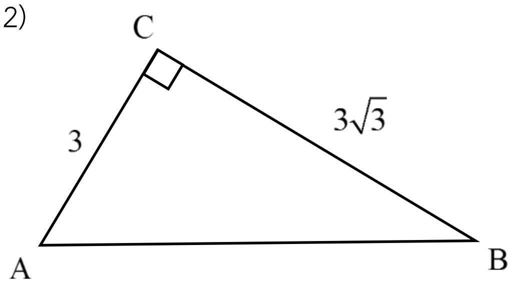
9) $\operatorname{cosec} x = \frac{2}{\sqrt{2}} \rightarrow x =$............................. 10) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x =$.............................

ตัวอย่างที่ 25 จงหาค่าของมุม A ของสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ต่อไปนี้

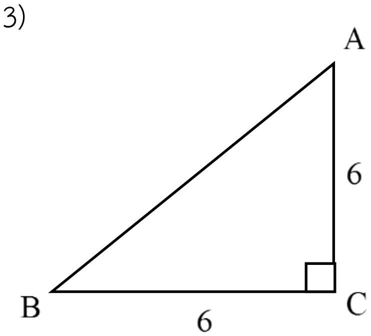
1)



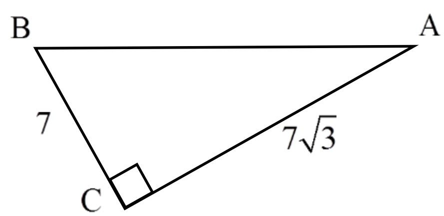
2)



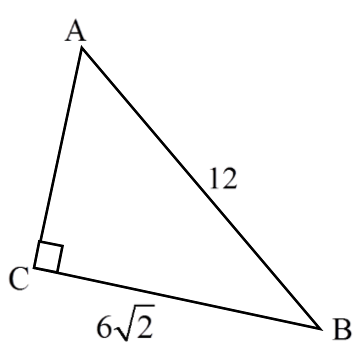
3)



4)



5)



กรณีที่ 2 ➡ มุมที่ต้องเปิดตารางฟังก์ชั่นตรีโกณมิติ

ตัวอย่างที่ 26 กำหนด $0^{O} < x < 90^{O}$ จงหาค่าของมุม x ที่

1) $\sin x = 0.407$

2) $\cos x = 0.934$

3) $\tan x = 2.050$

4) $\sin x = 0.616$

5) $\cos x = 0.208$

6) $\tan x = 0.105$

7) $\sin x = 0.430$

8) $\tan x = 2.655$

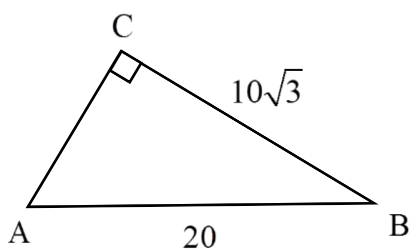
Worksheet 3: การหามุมเมื่อทราบค่าอัตราส่วนของฟังก์ชั่นตรีโกณมิติ

1. กำหนด $0^{\circ} < x < 90^{\circ}$ จงหาค่าของมุม x ที่

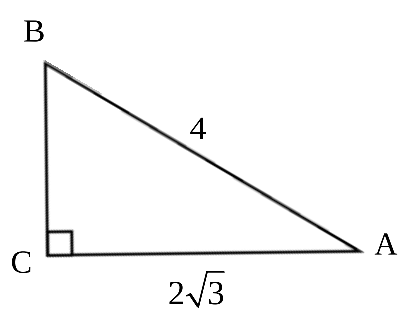
1) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x =$ ....
2) $\csc x = 2 \rightarrow x =$ ....
3) $\cot x = 1 \rightarrow x =$ ....
4) $\sec x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x =$ ....
5) $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow x =$ ....
6) $\tan x = 1 \rightarrow x =$ ....
7) $\cot x = \sqrt{3} \rightarrow x =$ ....
8) $\cot x = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow x =$ ....

2. จงหาค่าของมุม A ของสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ต่อไปนี้

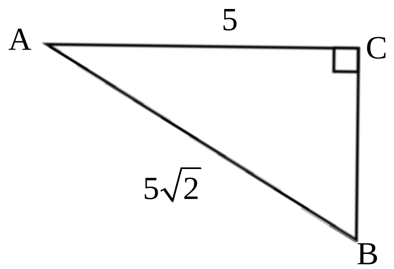
1)



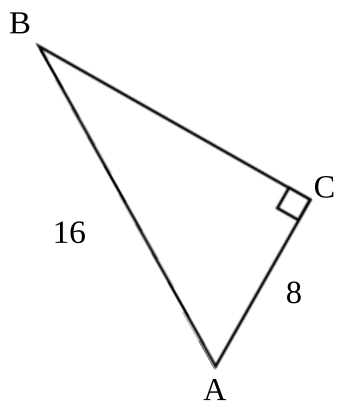
2)



3)



4)

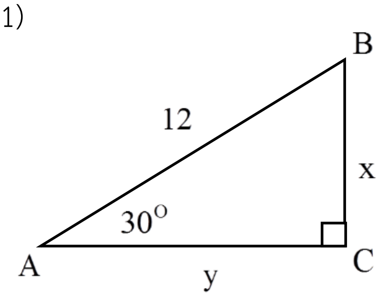


5. การหาด้านของของด้านสามเหลี่ยมมุมฉาก

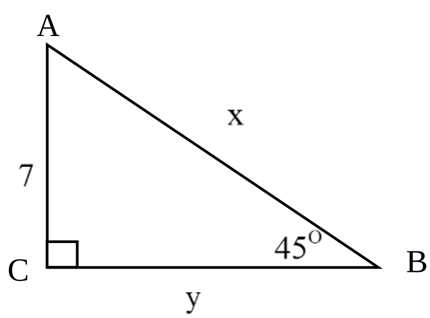
ในกรณีนี้โจทย์จะกำหนดความยาวของด้านมาหนึ่งด้าน พร้อมกับมุมหนึ่งมุมที่ไม่ใช่มุมฉาก

ตัวอย่างที่ 27 จงหาค่าของ x, y หรือ z ของสามเหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้

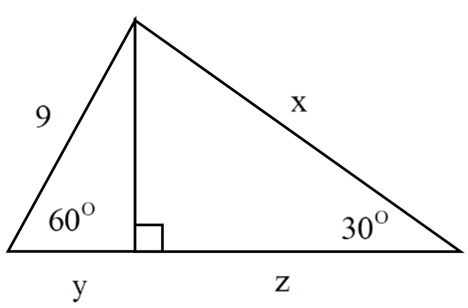
1)



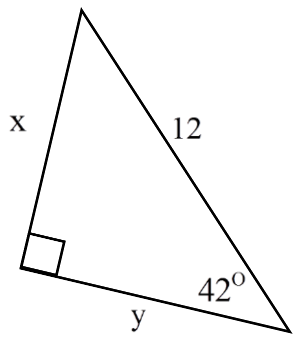
2)



3)



4)



ตัวอย่างที่ 25 ถ้ารูปสามเหลี่ยม ABC มี C เป็นมุมฉาก ลากเส้นจาก C มาตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่จุด D ด้าน AC และ BC ยาว 10 และ 12 หน่วยตามลำดับ จงหาค่าของ

1) $\sin A$ 2) $\cos A$ 3) $\tan A$ 4) $\sin B$

5) $\cos B$ 6) $\tan B$ 7) ความยาวของด้าน CD 8) ความยาวของด้าน DB

ตัวอย่างที่ 26 ถ้าสามเหลี่ยม ABC มีฐาน AB ยาว 6 หน่วย มุม CBA เท่ากับ 30 องศา และพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ 6 ตารางหน่วย แล้วด้าน BC ยาวเท่าใด

<u>วิธีทำ</u>

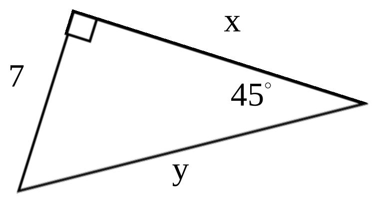
ตัวอย่างที่ 27 กำหนดรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีมุม $\mathrm{ABD} = 30^\circ$, มุม $\mathrm{ADB} = 60^\circ$ แล้วด้าน AC ตั้งฉากกับด้าน BD โดยที่ BC ยาว 12 หน่วย จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABD

<u>วิธีทำ</u>

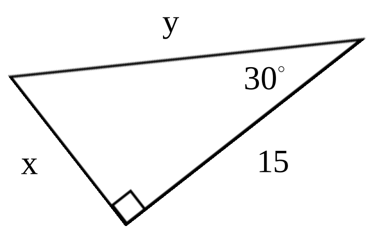
Worksheet 4: การหาด้านของของด้านสามเหลี่ยมมุมฉาก

1. จงหาค่าของ x, y หรือ z ของสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ต่อไปนี้

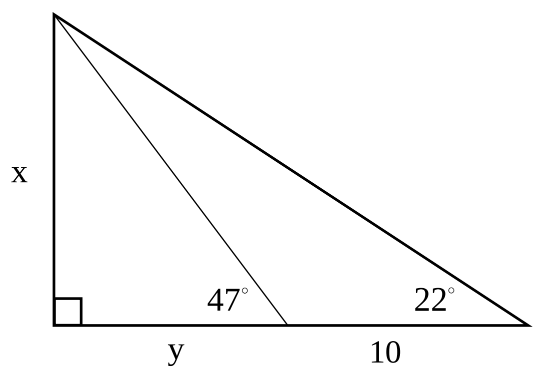
1)



2)



3)



2. ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากโดยมีมุม ABC เป็นมุมฉาก และมุม CAB กาง 60 องศา ถ้าผลบวกของความยาวด้าน AB กับ AC เท่ากับ 6 หน่วย แล้วด้าน CB จะยาวเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ

3. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่ A มีขนาด 70° มุม C มีขนาด 50° ด้าน AB ยาว 5 เซนติเมตร จาก B ลากเส้นตรงลงมาตั้งฉากกับด้าน AC ที่จุด P จงหาความยาวของด้าน BP, BC, AP, PC และ AC

วิธีทำ

6. โคฟังก์ชั่น (Co - function)

บทนิยาม $\text{Co} - \text{function}$

sine และ cosine เป็น cofunction ซึ่งกันและกัน

tangent และ cotangent เป็น cofunction ซึ่งกันและกัน

secant และ cosecant เป็น cofunction ซึ่งกันและกัน

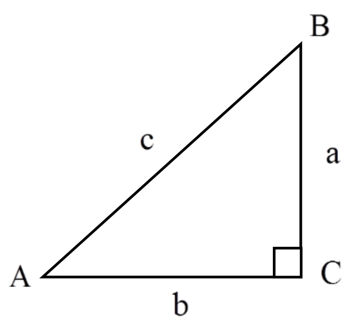
จำง่ายๆดังนี้

$\sin \xleftrightarrow{\text{cof.}} \cos$

$\tan \xleftrightarrow{\text{cof.}} \cot$

$\sec \xleftrightarrow{\text{cof.}} \text{cosec}$

พิจารณาจากสามเหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้



$$A + B = 90^\circ$$
$$A = 90^\circ - B$$
$$B = 90^\circ - A$$

A และ B เรียกว่า เป็นมุมประกอบมุมฉากซึ่งกันและกัน

และจะได้ว่า

$$\sin A = \cos B = \cos(90^\circ - A)$$
$$\cos A = \sin B = \sin(90^\circ - A)$$
$$\tan A = \cot B = \cot(90^\circ - A)$$

สมบัติของฟังก์ชั่นตรีโกณที่เป็น co function กัน

ถ้า $A + B = 90^\circ$ แล้ว

$\sin A$	=	$\cos B$	และ	$\sin A$	=	$\cos B$
$\tan A$	=	$\cot B$	และ	$\cot A$	=	$\tan B$
$\sec A$	=	$\operatorname{cosec} B$	และ	$\operatorname{cosec} A$	=	$\sec B$

$\boxed{A + B = 90^\circ}$

ตัวอย่างที่ 28 จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

.... 1) $\sin 32^{O} = \cos 58^{O}$ .... 2) $\cos 25^{O} = \operatorname{cosec} 65^{O}$

.... 3) $\sin 18^{O} = \sec 72^{O}$ .... 4) $\sin 52^{O} = \operatorname{cosec} 38^{O}$

.... 5) $\cos 63^{O} = \sin 27^{O}$ .... 6) $\operatorname{cosec} 24^{O} = \sec 66^{O}$

ตัวอย่างที่ 29 จงหามุม x ที่ $0^{O} < x < 90^{O}$ โดยที่

1) $\sin 26^{O} = \cos x \rightarrow x =$ .... 2) $\tan 17^{O} = \cot x \rightarrow x =$ ....

3) $\cos 34^{O} = \sin x \rightarrow x =$ .... 4) $\cot 75^{O} = \tan x \rightarrow x =$ ....

5) $\tan 29^{O} = \cot x \rightarrow x =$ .... 6) $\operatorname{cosec} 61^{O} = \sec x \rightarrow x =$ ....

ตัวอย่างที่ 30 จงเติมฟังก์ชันตรีโกณมิติให้ถูกต้อง

1) $\sin 31^{O}$ = ... 59^{O} 2) $\cos ec 25^{O}$ = ... 65^{O}

3) $\cos 18^{O}$ = ... 72^{O} 4) $\sin 53^{O}$ = ... 37^{O}

5) $\cos 69^{O}$ = ... 21^{O} 6) $\operatorname{cosec} 26^{O}$ = ... 64^{O}

ตัวอย่างที่ 31 จงหาค่าของ

1) $\sin 22^{\circ} - \cos 68^{\circ}$

2) $3(\sin 19^{\circ})(\sec 71^{\circ})$

3) $\sin 2^{\circ} + \sec 10^{\circ} + \tan 45^{\circ} - \operatorname{cosec} 80^{\circ} - \cos 88^{\circ}$

4) $\sin 60^{\circ} \cdot \sec 30^{\circ} \cdot \tan 20^{\circ} \cdot \tan 70^{\circ}$

5) $\tan 1^{\circ} \bullet \tan 2^{\circ} \bullet \tan 3^{\circ} \bullet .... \bullet \tan 87^{\circ} \bullet \tan 88^{\circ} \bullet \tan 89^{\circ}$

ตัวอย่างที่ 32 ถ้า $\sin(x - 40^{\circ}) = \cos 20^{\circ}$ แล้วจงหาค่า x

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่างที่ 33 ถ้า $0^{\circ} < \theta < 90^{\circ}$ แล้วค่าของ $\sin\theta \cdot \sec(90^{\circ} - \theta) - \cot\theta \cdot \cot(90^{\circ} - \theta)$

<u>วิธีทำ</u>

Worksheet 5 : โคฟังก์ชั่น (Co - function)

1. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

.... 1) $\tan 22^{O} = \cot 68^{O}$ .... 2) $\cot 2^{O} = \tan 88^{O}$

.... 3) $\operatorname{cosec} 42^{O} = \sec 48^{O}$ .... 4) $\tan 12^{O} = \tan 78^{O}$

.... 5) $\cot 11^{O} = \tan 79^{O}$ .... 6) $\cos 61^{O} = \sin 19^{O}$

2. จงหามุม x ที่ $0^{O} < x < 90^{O}$ โดยที่

1) $\operatorname{cosec} 28^{O} = \sec x \rightarrow x =$ .... 2) $\sec 48^{O} = \operatorname{cosec} x \rightarrow x =$ ....

3) $\sin 62^{O} = \cos x \rightarrow x =$ .... 4) $\cot 57^{O} = \tan x \rightarrow x =$ ....

3. จงเติมฟังก์ชันตรีโกณมิติให้ถูกต้อง

1) $\sin 28^{O} =$ .... 62^{O} 2) $\cot 88^{O} =$ .... 65^{O}

3) $\sec 41^{\circ} =$ .... 49^{O} 4) $\tan 12^{O} =$ .... 78^{O}

5) $\cot 14^{O} =$ .... 76^{O} 6) $\cos 69^{O} =$ .... 21^{O}

4. จงหาค่าของ

1) $5(\cos 21^{O})(\operatorname{cosec} 69^{O})(\cos 69^{\circ})$

2) $\cos 5^{\circ} + \sec 15^{\circ} + \cot 30^{\circ} - \operatorname{cosec} 75^{\circ} - \sin 85^{\circ}$

3) $\dfrac{6(\sin 2^\circ)(\tan 22^\circ)(\cot 60^\circ)}{\sqrt{3}(\cot 68^\circ)(\cos 88^\circ)}$

4) $\cot 1^{\text{O}} \bullet \cot 2^{\text{O}} \bullet \cot 3^{\text{O}} \bullet .... \bullet \cot 87^{\text{O}} \bullet \cot 88^{\text{O}} \bullet \cot 89^{\text{O}}$

5. ถ้า $0^{\text{O}} < x < 90^{\text{O}}$ แล้วค่าของ $\dfrac{\sin(90^\circ - A)}{\sec(90^\circ - A)} \cdot \dfrac{\tan(90^\circ - A)}{\cos A}$ เท่ากับเท่าใด

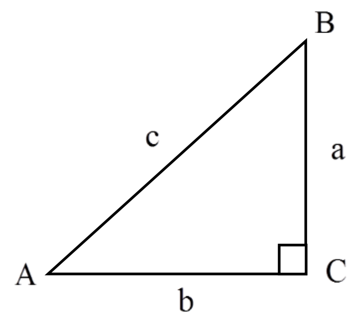
7. เอกลักษณ์ฟังก์ชั่นตรีโกณมิติ

บทนิยาม เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ หมายถึง สมการตรีโกณที่เป็นจริงทุกมุมใดๆ ทั้งนี้ต้องมีการยกเว้นมุมบางมุมภายในสมการอยู่แล้ว

เอกลักษณ์ตรีโกณมิติที่ต้องทราบ

จากสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ดังรูป พิจารณาค่า $\sin^2 A + \cos^2 A$ โดย

$\sin^2 A + \cos^2 A$ =



เอกลักษณ์ทั้ง 3 ข้อ สรุปได้ดังนี้

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\tan^2 A + 1 = \sec^2 A$$

$$1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$$

ตัวอย่างที่ 34 จงหาค่าของ

1) $\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ$

2) $2 - \sin^2 70^\circ - \cos^2 70^\circ$

3) $\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ$

4) $1 - \cos^2 47^\circ - \cos^2 43^\circ$

5) $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + ... + \sin^2 87^\circ + \sin^2 88^\circ + \sin^2 89^\circ$

ตัวอย่างที่ 35 จากสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มี C เป็นมุมฉาก ถ้า $\sin \mathrm{A} = \frac{4}{5}$ แล้วจงหาค่าของ $\cos \mathrm{A}, \tan \mathrm{A}$

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่างที่ 36 ถ้า θ เป็นมุมแหลม และ $3\cot\theta = 4$ แล้วจงหาค่าของ $\frac{10\sin\theta - 6\cos\theta}{4\sin\theta + 3\cos\theta}$

<u>วิธีทำ</u>

Worksheet 6 เอกลักษณ์ฟังก์ชั่นตรีโกณมิติ

1. จงหาค่าของ

1) $\sec^2 56^\circ - \tan^2 56^\circ$

2) $2 - \cot^2 35^\circ + \sec^2 55^\circ$

3) $\operatorname{cosec}^2 73^\circ - \cot^2 73^\circ$

4) $1 - \sec^2 31^\circ + \cot^2 59^\circ$

5) $\cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + ... + \cos^2 87^\circ + \cos^2 88^\circ + \cos^2 89^\circ$

2. กำหนด θ เป็นมุมแหลม ถ้า $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = 5$ แล้วจงหาค่าของ $\cos\theta$

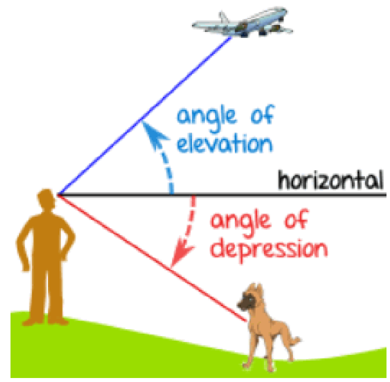
8. การประยุกต์อัตราส่วนตรีโกณมิติ

การประยุกต์อัตราส่วนตรีโกณมิติมาแก้ปัญหาในเรื่องของระยะทางและความสูงต้องใช้นิยามของฟังก์ชั่นอัตราส่วนตรีโกณมิติในเทอมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเข้ามาแก้ โดยต้องเข้าใจเกี่ยวกับการวัดมุมซึ่งจะมีการใช้มุมก้ม (angle of depression) และมุมเงย (angle of elevation) ซึ่งมีความหมายดังนี้

มุมก้มและมุมเงย เป็นการวัดมุมโดยมีด้านเริ่มต้นของมุมอยู่ที่เส้นระดับสายตา (แนวนอน) ไปยังเส้นที่เกิดจากสายตามองไปยังวัตถุที่

ถ้าวัตถุอยู่เหนือเส้นระดับสายตา เราจะเรียกว่า **มุมเงย**

ถ้าวัตถุอยู่ใต้เส้นระดับสายตา เราจะเรียกว่า **มุมก้ม**



หลักในการแก้ปัญหา เมื่ออ่านโจทย์และวาดรูปตามโจทย์ซึ่งมีโครงร่างเป็นสามเหลี่ยมพร้อมกับใส่มุมและด้านที่โจทย์กำหนดมา สมมุติสิ่งที่โจทย์ต้องการเป็นตัวแปรสร้างสมการที่มีตัวแปรนั้นโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณในการช่วยสร้างสมการ

ข้อตกลง 1. พื้นดินหรือพื้นน้ำให้ถือว่าเป็นแนวราบทั้งสิ้น ขนานกับแนวระดับสายตา

2. ถ้าโจทย์ไม่กำหนดความสูงของผู้สังเกตมาให้ ให้ถือว่าความสูงของผู้สังเกตเป็นศูนย์ และแนวระดับสายตาก็คือแนวพื้นดินหรือพื้นน้ำนี่เอง

ตัวอย่างที่ 37 เอมอรยืนห่างจากตึกแห่งหนึ่ง 150 เมตร เมื่อมองขึ้นไปบนยอดตึกเป็นมุมเงยขนาด 36° องศา อยากทราบว่า ตึกนี้สูงประมาณกี่เมตร โดยไม่ต้องคิดความสูงของเอมอร

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่างที่ 38 หนึ่งยืนอยู่บนฝั่งแม่น้ำและอยากทราบว่า แม่น้ำช่วงนี้กว้างเท่าใด จึงใช้ต้นไม้ที่อยู่บนฝั่งตรงข้ามของแม่น้ำ (จุด C)เป็นจุดสังเกต แล้วจึงเดินจากจุด B ซึ่งอยู่ตรงข้ามกับต้นไม้ไปตามแนวฝั่งแม่น้ำถึงจุด A จะได้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม B เป็นมุมฉาก $\overline{AB}$ ยาว 50 เมตร และมุม CAB มีขนาด 25 องศา อยากทราบว่า แม่น้ำกว้างกี่เมตร

<u>**วิธีทำ**</u>

ตัวอย่างที่ 39 นาวินยืนอยู่บนหน้าผาแห่งหนึ่ง ซึ่งสูงจากระดับน้ำทะเล 48.30 เมตร เมื่อเขามองลงไปยังเรือลำหนึ่ง โดยมุมที่แนวสายตาทำกับแนวเส้นระดับเป็นมุมก้มมีขนาด 60 องศา ถ้าตาของนาวินสูงจากพื้นของหน้าผา 1.70 เมตร เรือลำนี้อยู่ห่างจากเชิงหน้าผาประมาณกี่เมตร

<u>**วิธีทำ**</u>

ตัวอย่างที่ 40 นักท่องเที่ยวคนหนึ่งยืนอยู่บนประภาคารสังเกตเห็นเรือสองลำจอดอยู่ในทะเลทางทิศตะวันออกของประภาคารในแนวเส้นตรงเดียวกัน โดยทำมุมก้มขนาด 30 องศาและ 60 องศากับแนวระดับ ประภาคารแห่งนี้อยู่สูงจากระดับน้ำทะเลประมาณเท่าใด ถ้าเรือทั้งสองลำอยู่ห่างกัน 200 เมตร

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่างที่ 41 เมื่อดวงอาทิตย์ทำมุม 30° กับแนวระนาบแล้ว ตึกสูง 150 เมตร จะทอดยาวเท่าใด

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่างที่ 42 รถสองคันจอดอยู่ห่างกัน 60 เมตร และจอดอยู่ในแนวเส้นตรงกับตึก คนในรถแต่ละคันมองยอดตึกเป็นมุมเงย 45° กับ 30° ตามลำดับ จงหาว่า

1. รถคันที่จอดอยู่ใกล้ตึก อยู่ห่างจากตึกเท่าไร
2. ความสูงของตึกเป็นเท่าไร

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่างที่ 43 นายณัฐดนัยอยู่ยอดประภาคารแห่งหนึ่งซึ่งสูง 120 เมตร จากระดับน้ำทะเล ถ้ามองออกไปที่เรือ 2 ลำในทะเลที่อยู่ในแนวเดียวกันกับประภาคารพบว่าเป็นมุมก้ม 30° กับ 60° ตามลำดับ จงหาระยะห่างระหว่างเรือทั้งสองลำ

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่างที่ 44 เด็กหญิงบีมยืนอยู่ห่างจากตึกหลังหนึ่ง 18 เมตร มองเห็นยอดตึกและเสาอากาศซึ่งอยู่บนยอดตึกเป็นมุมเงย 30° กับ 60° ตามลำดับ จงหาความสูงของเสาอากาศ

<u>วิธีทำ</u>

ตัวอย่างที่ 45 ก้านยาวยืนอยู่บนดาดฟ้าของตึก 15 ชั้นหลังหนึ่ง เขามองเห็นป้อมยาวที่อยู่ทางทิศตะวันออกของตึกเป็นมุมก้ม 60° และมองเห็นรถบรรทุกคันหนึ่งจอดอยู่ทางทิศใต้ของป้อมยามนั้นเป็นก้ม 30° อยากทราบว่ารถบรรทุกอยู่ห่างจากป้อมยามเท่าไร ถ้าตึกหลังนั้นสูงชั้นละ 4 เมตร

<u>วิธีทำ</u>