



แผนการจัดการเรียนรู้  
วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 6 ค 23203  
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

จัดทำโดย

อาจารย์เกตุม สระบุรีรินทร์  
นายณัฐวัฒน์ ไชยโพธิ์

ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2558  
โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา



## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ ๑

หน่วยการเรียนรู้ที่ ๑	การให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม
เรื่อง ความรู้พื้นฐานทางเรขาคณิต	วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม
ชื่อรายวิชา ค ๒๓๒๐๒	กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ ๓ ภาคเรียนที่ ๒	ปีการศึกษา ๒๕๕๘ เวลา ๒ ชั่วโมง
ผู้สอน นายณัฐวัฒน์ ไชยโพธิ์	อาจารย์พีเลียง อาจารย์เกตุม์ สระบุรีรินทร์

### ผลการเรียนรู้

นักเรียนสามารถพิสูจน์ข้อความทางเรขาคณิตที่กำหนดให้ได้

### สาระสำคัญ

การให้เหตุผลทางเรขาคณิต มีความเกี่ยวข้องกับ คำนิยาม บทนิยาม สัจพจน์และทฤษฎีบท โดย คำนิยาม คือ คำที่เป็นพื้นฐานในการสื่อความหมายให้เข้าใจตรงกันโดยไม่ต้องให้ความหมายของคำ ได้แก่ จุด เส้นตรง และระนาบ

บทนิยาม คือ คำหรือข้อความที่มีการให้ความหมายหรือจำกัดความไว้อย่างชัดเจน ตัวอย่างของบทนิยาม เช่น

รังสี คือส่วนหนึ่งของเส้นตรง ซึ่งมีจุดปลายเพียงจุดเดียว

รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือรูปสี่เหลี่ยมที่มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก และมีด้านทุกด้านยาวเท่ากัน

มุมตรง คือ มุมที่แขนทั้งสองของมุมอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ซึ่งมีขนาด 2 มุมฉาก หรือ

180 องศา

เส้นมัธยฐาน คือ ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดมุมของรูปสามเหลี่ยมมายังจุดกึ่งกลางของด้านที่อยู่ตรงข้าม

สัจพจน์ คือ ข้อความที่ตกลงกันหรือยอมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ และนำไปใช้อ้างเพื่อการพิสูจน์ข้อความอื่นว่าเป็นจริงได้ เช่น

1. มีเส้นตรงเพียงเส้นเดียวเท่านั้นที่ผ่านจุดสองจุดที่กำหนดให้
2. เส้นตรงสองเส้นที่ตัดกัน จะตัดกันที่จุดเพียงจุดเดียวเท่านั้น
3. สามารถต่อส่วนของเส้นตรงออกไปทั้งสองข้างได้โดยไม่จำกัดความยาว
4. สามารถลากเส้นตรงเพียงเส้นเดียวเท่านั้นให้ผ่านจุดจุดหนึ่งที่ไม่อยู่บนเส้นตรงที่กำหนดให้และขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้

ทฤษฎีบท คือ ข้อความทางคณิตศาสตร์ที่พิสูจน์ได้ว่าเป็นจริง และนำไปใช้ในการอ้างอิง

## ทักษะ/กระบวนการ

- 1) การแก้ปัญหา
- 2) การให้เหตุผล
- 3) การสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ

## ด้านคุณลักษณะ

1. ใฝ่เรียนรู้
2. ทำงานเป็นระบบ รอบคอบ
3. มุ่งในการทำงาน

## กิจกรรมการเรียนรู้

### ชั่วโมงที่ 1

#### กิจกรรมนำเข้าสู่การเรียนรู้

1. ครูทบทวนความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต เกี่ยวกับประโยคเงื่อนไข บทกลับของประโยคเงื่อนไข โดยการถามตอบ

ตัวอย่าง 1 ประโยคเงื่อนไข “ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ๆสามคู่ แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน”

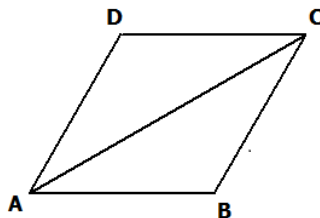
ถ้าเรานำผลของประโยคเงื่อนไขนี้มาเป็นเหตุ และนำเหตุของประโยคเงื่อนไขนี้มาเป็นผล เราจะได้บทกลับของประโยคเงื่อนไข เป็นประโยคใหม่ ดังนี้

“ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน แล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปมีขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ๆสามคู่”

#### กิจกรรมพัฒนาผู้เรียน

2. ครูยกตัวอย่างของการพิสูจน์

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้  $\square ABCD$  เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดยมี  $\overline{AC}$  เป็นเส้นทแยงมุม จงพิสูจน์ว่า  $\triangle ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



กำหนดให้

$\square ABCD$  เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดยมี  $\overline{AC}$  เป็นเส้นทแยงมุม

ต้องการพิสูจน์ว่า

$\triangle ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

พิสูจน์

ลาก  $\overline{AC}$

ข้อความ	เหตุผล
1. $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน 2. $AB = CB$ 3. ดังนั้น $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	1. กำหนดให้ 2. รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนมีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน 3. รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากันสองด้าน เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

### กิจกรรมรวบยอด

8. ครูให้นักเรียนทำใบงานที่ 1

### ชั่วโมงที่ 2

#### กิจกรรมนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูทบทวนทฤษฎีบทเบื้องต้นทางเรขาคณิตที่นักเรียนเคยทราบมาแล้ว ซึ่งจะกล่าวถึงโดยไม่พิสูจน์ เช่น

ทฤษฎีบท ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน

ทฤษฎีบท เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อ ขนาดของมุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ  $180$  องศา

ทฤษฎีบท เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อ มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

ทฤษฎีบท เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน

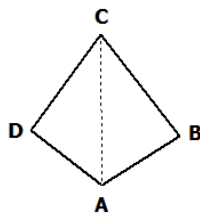
ทฤษฎีบท ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ  $180$  องศา

ทฤษฎีบท ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น

#### กิจกรรมพัฒนาผู้เรียน

2. ครูยกตัวอย่างของการนำทฤษฎีบทไปใช้ในการพิสูจน์ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงพิสูจน์ว่าขนาดของมุมภายในทั้งสี่มุมของรูปสี่เหลี่ยมรวมกันเท่ากับ  $360$  องศา



กำหนดให้

$\square ABCD$  เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่ง

ต้องการพิสูจน์ว่า

$$\angle DAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA = 360^\circ$$

พิสูจน์

ลาก  $\overline{AC}$

ข้อความ	เหตุผล
1. จาก $\hat{CAB} + \hat{ABC} + \hat{BCA} = 180^\circ$ และ $\hat{CAD} + \hat{ADC} + \hat{DCA} = 180^\circ$	1. ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ $180^\circ$
2. $(\hat{CAB} + \hat{ABC} + \hat{BCA}) + (\hat{CAD} + \hat{ADC} + \hat{DCA})$ $= 180^\circ + 180^\circ$ $= 360^\circ$	2. สมบัติการเท่ากัน
3. $\hat{DAB} + \hat{ABC} + \hat{BCD} + \hat{CDA} = 360^\circ$	3. จากข้อ 2

### กิจกรรมรวบยอด

- ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 1.1 ในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติม. 3 เล่ม 2
- ทำใบงานที่ 2

### สื่อ /อุปกรณ์/ แหล่งการเรียนรู้

- ใบงานที่ 1 , ใบงานที่ 2
- หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

### การวัดและประเมินผล

เป้าหมาย	หลักฐาน	เครื่องมือวัด	เกณฑ์การประเมิน
<b>สาระสำคัญ</b> - การให้เหตุผลทางเรขาคณิต	- ใบงานที่ 1 - ใบงานที่ 2	- ใบงานที่ 1 - ใบงานที่ 2	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ
<b>คุณลักษณะอันพึงประสงค์</b> - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน	- การเข้าเรียน และการทำงาน	- เข้าเรียน - มีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียน	- เข้าเรียนตรงเวลา - เมื่อครูถาม นักเรียนมีความกระตือรือร้นในการตอบ
<b>สมรรถนะ</b> - การแก้ปัญหา - การให้เหตุผล - ความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมาย	- ใบงานที่ 1 - ใบงานที่ 2	- ใบงานที่ 1 - ใบงานที่ 2	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ



## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ ๒

หน่วยการเรียนรู้ที่ ๑	การให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม
เรื่อง ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม	วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม
ชื่อรายวิชา ค ๒๓๒๐๒	กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ ๓ ภาคเรียนที่ ๒	ปีการศึกษา ๒๕๕๘ เวลา ๓ ชั่วโมง
ผู้สอน นายณัฐวัฒน์ ไชยโพธิ์	อาจารย์พีเลียง อาจารย์เกตุม์ สระบุรีรินทร์

### ผลการเรียนรู้

นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมไปใช้ในการให้เหตุผลได้

### สาระสำคัญ

- ทฤษฎีบท ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน (ด.ม.ด.) กล่าวคือ มีด้านยาวเท่ากันสองคู่และมุมในระหว่งด้านคู่ที่เท่ามีขนาดเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ
- ทฤษฎีบท ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ มุม – ด้าน – มุม (ม.ด.ม.) กล่าวคือ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่และด้านซึ่งเป็นแขนร่วมของมุมทั้งสองยาวเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ
- ทฤษฎีบท ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ มุม – มุม – ด้าน (ม.ม.ด.) กล่าวคือ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่แล้วและด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน ยาวเท่ากันหนึ่งคู่ แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ
- ทฤษฎีบท ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน (ด.ด.ด.) กล่าวคือ มีด้านยาวเท่ากันสามคู่ แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ
- ทฤษฎีบท ด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งจะยาวเท่ากันก็ต่อเมื่อ มุมที่อยู่ตรงข้ามด้านทั้งสองนั้นมีขนาดเท่ากัน
- ทฤษฎีบท ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ ฉาก – ด้าน – ด้าน (ฉ.ด.ด.) กล่าวคือ มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน และมีด้านอื่นอีกด้านหนึ่งยาวเท่ากันแล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

## ทักษะ/กระบวนการ

- 1) การแก้ปัญหา
- 2) การให้เหตุผล
- 3) การสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ

## ด้านคุณลักษณะ

1. ใฝ่เรียนรู้
2. ทำงานเป็นระบบ รอบคอบ
3. มุ่งในการทำงาน

## กิจกรรมการเรียนรู้

### ชั่วโมงที่ 1

#### กิจกรรมนำเข้าสู่การเรียนรู้

3. ครูทบทวนทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมที่นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการหรือไม่ ซึ่งเราสามารถตรวจสอบโดยใช้เงื่อนไขตามทฤษฎีบทซึ่งจะกล่าวถึงโดยไม่พิสูจน์ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน (ด.ม.ด.) กล่าวคือ มีด้านยาวเท่ากันสองคู่และมุมในระหว่างด้านคู่ที่เท่ามีขนาดเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

ทฤษฎีบท ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ มุม – ด้าน – มุม (ม.ด.ม.) กล่าวคือ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่และด้านซึ่งเป็นแขนร่วมของมุมทั้งสองยาวเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

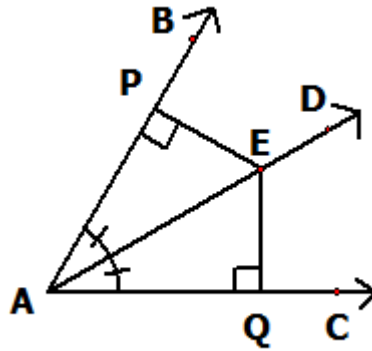
ทฤษฎีบท ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ มุม – มุม – ด้าน (ม.ม.ด.) กล่าวคือ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่แล้วและด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน ยาวเท่ากันหนึ่งคู่ แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

ทฤษฎีบท ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน (ด.ด.ด.) กล่าวคือ มีด้านยาวเท่ากันสามคู่ แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

#### กิจกรรมพัฒนาผู้เรียน

4. ครูยกตัวอย่าง ที่ใช้ทฤษฎีบทที่แสดงเงื่อนไขเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมมาใช้อ้างอิงในการพิสูจน์ ดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง 1 จงพิสูจน์ว่าจุดใดๆที่อยู่บนเส้นแบ่งครึ่งมุมมุมหนึ่งย่อมอยู่ห่างจากแขนทั้งสองข้างของมุมนั้นเป็นระยะเท่ากัน



กำหนดให้  $\overline{AD}$  แบ่งครึ่ง  $\widehat{BAC}$  จุด  $E$  เป็นจุดบน  $\overline{AD}$   $\overline{EP}$  และ  $\overline{EQ}$  ตั้งฉากกับ  $\overline{AB}$  และ  $\overline{AC}$  ที่จุด  $P$  และจุด  $Q$  ตามลำดับ  
 ต้องการพิสูจน์ว่า  $EP = EQ$   
 พิสูจน์ ใน  $\triangle AEP$  และ  $\triangle AEQ$

ข้อความ	เหตุผล
4. $\widehat{PAE} = \widehat{QAE}$	4. $\overline{AD}$ แบ่งครึ่ง $\widehat{BAC}$
5. $\widehat{APE} = \widehat{AQE} = 90^\circ$	2. กำหนดให้
6. $AE = AE$	3. $\overline{AE}$ เป็นด้านร่วม
7. ดังนั้น $\triangle AEP \cong \triangle AEQ$	4. (ม.ด.ม.)
8. จะได้ $EP = EQ$	5. ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน

### กิจกรรมรวบยอด

3. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 1.2 ในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เล่ม 2 โดยมีครูดูแลอย่างใกล้ชิด

### ชั่วโมงที่ 2

#### กิจกรรมนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูทบทวนทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยมที่นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการหรือไม่ ซึ่งเราสามารถตรวจสอบโดยใช้เงื่อนไขตามทฤษฎีบทซึ่งจะกล่าวถึงโดยไม่พิสูจน์ต่อไป

ทฤษฎีบท ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน (ด.ม.ด.) กล่าวคือ มีด้านยาวเท่ากันสองคู่และมุมในระหว่างด้านคู่ที่เท่ามีขนาดเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ



ทฤษฎีบท ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ มุม – ด้าน – มุม (ม.ด.ม.) กล่าวคือ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่และด้านซึ่งเป็นแขนร่วมของมุมทั้งสองยาวเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

ทฤษฎีบท ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ มุม – มุม – ด้าน (ม.ม.ด.) กล่าวคือ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่แล้วและด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน ยาวเท่ากันหนึ่งคู่ แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

ทฤษฎีบท ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน (ด.ด.ด.) กล่าวคือ มีด้านยาวเท่ากันสามคู่ แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

### กิจกรรมพัฒนาผู้เรียน

2. ครูได้อธิบายว่าทฤษฎีบทหนึ่งที่สำคัญเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว พร้อมตัวอย่างการพิสูจน์

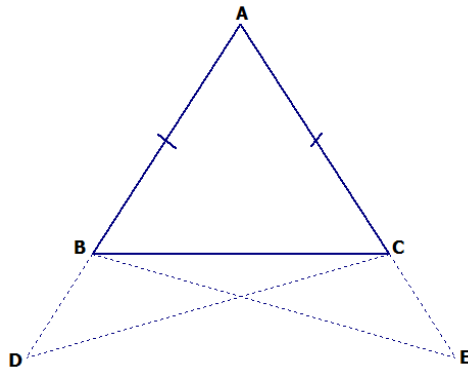
ทฤษฎีบท ด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งจะยาวเท่ากันก็ต่อเมื่อ มุมที่อยู่ตรงข้ามด้านทั้งสองนั้นมีขนาดเท่ากัน

ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ จะแยกพิสูจน์เป็นสองตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 พิสูจน์ว่า ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านยาวเท่ากันสองด้าน แล้วมุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านที่ยาวเท่ากัน มีขนาดเท่ากัน

ตอนที่ 2 พิสูจน์ว่า ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองมุม แล้วด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมที่มีขนาดเท่ากัน ยาวเท่ากัน

ตอนที่ 1



กำหนดให้

ต้องการพิสูจน์ว่า

พิสูจน์

$\triangle ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี  $AB = AC$

$\hat{ACB} = \hat{ABC}$

ต่อ  $\overline{AB}$  ถึงจุด  $D$  และต่อ  $\overline{AC}$  ถึงจุด  $E$  ทำให้  $AD = AE$

ข้อความ	เหตุผล
1. $AB = AC$	1. กำหนดให้
2. $\hat{BAE} = \hat{CAD}$	2. เป็นมุมเดียวกัน
3. $AE = AD$	3. จากการสร้าง
4. ดังนั้น $\triangle ABE \cong \triangle ACD$	4. (ด.ม.ด.)
5. จะได้ $BE = CD$	5. ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน
6. และ $\hat{AEB} = \hat{ADC}$	6. มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน
7. จะได้ $CE = BD$	7. สมบัติของการเท่ากัน
8. ดังนั้น $\triangle BCE \cong \triangle CBD$	8. (ด.ม.ด.)
9. $\hat{BCE} = \hat{CBD}$	9. มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน
10. $\hat{ACE} = \hat{ABD}$	10. ต่างก็เป็นมุมตรง
11. จะได้ $\hat{ACE} - \hat{BCE} = \hat{ABD} - \hat{CBD}$	11. สมบัติของการเท่ากัน
12. นั่นคือ $\hat{ACB} = \hat{ABC}$	12. สมบัติของการเท่ากัน

3. ครูให้นักเรียนร่วมกัน พิสูจน์ ในตอนที่ 2

### กิจกรรมรวบยอด

4. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 1.1 ในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติมม. 3 เล่ม 2 โดยครูเป็นผู้แนะนำ

### ชั่วโมงที่ 3

#### กิจกรรมนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูทบทวนทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมที่นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการหรือไม่ ซึ่งเราสามารถตรวจสอบโดยใช้เงื่อนไขตามทฤษฎีบทซึ่งจะกล่าวถึงโดยไม่พิสูจน์ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน (ด.ม.ด.) กล่าวคือ มีด้านยาวเท่ากันสองคู่และมุมในระหว่างด้านคู่ที่เท่าที่มีขนาดเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

ทฤษฎีบท ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ มุม – ด้าน – มุม (ม.ด.ม.) กล่าวคือ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่และด้านซึ่งเป็นแขนร่วมของมุมทั้งสองยาวเท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

ทฤษฎีบท ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ มุม - มุม - ด้าน (ม.ม.ด.) กล่าวคือ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่แล้วและด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน ยาวเท่ากันหนึ่งคู่ แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

ทฤษฎีบท ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน (ด.ด.ด.) กล่าวคือ มีด้านยาวเท่ากันสามคู่ แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

ทฤษฎีบท ด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งจะยาวเท่ากันก็ต่อเมื่อ มุมที่อยู่ตรงข้ามด้านทั้งสองนั้นมีขนาดเท่ากัน

### กิจกรรมพัฒนาผู้เรียน

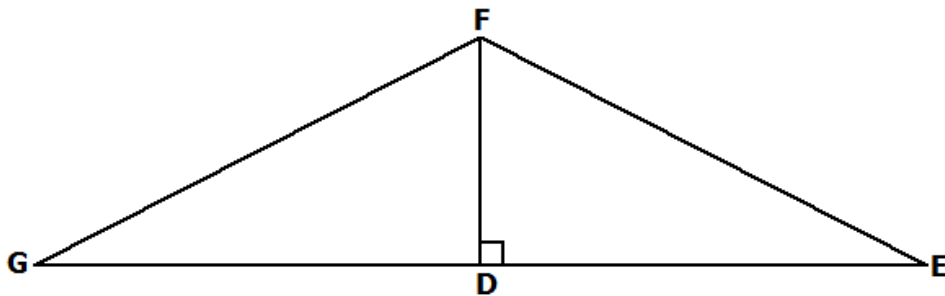
2. ครูได้อธิบายว่าทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นอีกทฤษฎีบทที่ใช้ในการตรวจสอบความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปที่นักเรียนไม่เคยทราบมาก่อน

ทฤษฎีบท ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ ฉาก - ด้าน - ด้าน (ฉ.ด.ด.) กล่าวคือ มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน และมีด้านอื่นอีกด้านหนึ่งยาวเท่ากันแล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

กำหนดให้  $\triangle ABC$  และ  $\triangle DEF$  เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยมี  $\hat{BAC} = \hat{EDF} = 90^\circ$

ต้องการพิสูจน์ว่า  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

พิสูจน์ ต่อ  $\overline{ED}$  ออกไปทางจุด  $D$  จนถึงจุด  $G$  ทำให้  $DG = AB$  ลาก  $\overline{GF}$



ข้อความ	เหตุผล
1. เนื่องจาก $AC = DF$	1. กำหนดให้
2. $AB = DG$	2. จากการสร้าง
3. $\hat{BAC} = 90^\circ$	3. กำหนดให้
4. $\hat{GDF} = 90^\circ$	4. $\hat{EDF} = 90^\circ$ และ $\hat{EDG}$ เป็นมุมตรง
5. จะได้ $\hat{BAC} = \hat{GDF}$	5. สมบัติของการเท่ากัน
6. ดังนั้น $\triangle ABC \cong \triangle DEF$	6. ค.ม.ด.
7. จะได้ $BC = GF$	7. ด้านคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะยาวเท่ากัน
8. เนื่องจาก $BC = EF$	8. กำหนดให้
9. ดังนั้น $GF = EF$	9. สมบัติของการเท่ากัน
10. จะได้ $\hat{FED} = \hat{FGD}$	10. ถ้ารูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านยาวเท่ากันสองด้านแล้วมุมตรงข้ามกับด้านคู่ที่เท่ากันย่อมมีขนาดเท่ากัน
11. เนื่องจาก $\hat{FDE} = 90^\circ$	11. กำหนดให้
12. จะได้ $\hat{FDG} = \hat{FDE}$	12. สมบัติการเท่ากัน
13. $DF = DF$	13. ด้านร่วม
14. ดังนั้น $\triangle DGF \cong \triangle DEF$	14. ค.ม.ด.
15. เนื่องจาก $\triangle ABC \cong \triangle DGF$	15. จากการพิสูจน์ข้างต้น
16. ดังนั้น $\triangle ABC \cong \triangle DEF$	16. สมบัติของความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

#### กิจกรรมรวบยอด

4. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 1.1 ในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 3 เล่ม 2 โดยครูเป็นผู้แนะนำ

สื่อ / อุปกรณ์ / แหล่งการเรียนรู้

1. ใบงานที่ 2

2. หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

การวัดและประเมินผล

เป้าหมาย	หลักฐาน	เครื่องมือวัด	เกณฑ์การประเมิน
<b>สาระสำคัญ</b> - การให้เหตุผลทางเรขาคณิต	- ใบงานที่ 2	- ใบงานที่ 2	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ
<b>คุณลักษณะอันพึงประสงค์</b> - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน	- การเข้าเรียน และการทำงาน	- เข้าเรียน - มีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียน	- เข้าเรียนตรงเวลา - เมื่อครูถาม นักเรียนมีความกระตือรือร้นในการตอบ
<b>สมรรถนะ</b> - การแก้ปัญหา - การให้เหตุผล - ความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมาย	- ใบงานที่ 2	- ใบงานที่ 2	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ

Created by Ketum Saraburin , Nattawat Chaiyapong



### แผนการจัดการเรียนรู้ที่ ๓

หน่วยการเรียนรู้ที่ ๑ การให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม  
เรื่อง ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม  
ชื่อรายวิชา ค ๒๓๒๐๒ กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์  
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ ๓ ภาคเรียนที่ ๒ ปีการศึกษา ๒๕๕๘ เวลา ๒ ชั่วโมง  
ผู้สอน นายณัฐวัฒน์ ไชยโพธิ์ อาจารย์พีเลียง อาจารย์เกตุม์ สระบุรีรินทร์

#### ผลการเรียนรู้

นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับสมบัติของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานไปใช้ในการให้เหตุผลได้

#### สาระสำคัญ

- ทฤษฎีบท ด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานยาวเท่ากัน  
ทฤษฎีบท ถ้ารูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านตรงข้ามยาวเท่ากันสองคู่แล้วรูปสี่เหลี่ยมนั้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน  
ทฤษฎีบท มุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีขนาดเท่ากัน  
ทฤษฎีบท ถ้ารูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งมีมุมตรงข้ามที่มีขนาดเท่ากันสองคู่แล้วรูปสี่เหลี่ยมรูปนั้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน  
ทฤษฎีบท เส้นทแยงมุมทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุดตัดของเส้นทแยงมุม  
ทฤษฎีบท ส่วนของเส้นตรงที่ปิดหัวท้ายของส่วนของเส้นตรงที่ขนานกันและยาวเท่ากันจะขนานกันและยาวเท่ากัน  
ทฤษฎีบท ส่วนของเส้นตรงที่ลากเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมใดๆ จะขนานกับด้านที่สามและยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านที่สาม

#### ทักษะ/กระบวนการ

- 1) การแก้ปัญหา
- 2) การให้เหตุผล
- 3) การสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ

## ด้านคุณลักษณะ

1. ใฝ่เรียนรู้
2. ทำงานเป็นระบบ รอบคอบ
3. มุ่งในการทำงาน

## กิจกรรมการเรียนรู้

### ชั่วโมงที่ 1

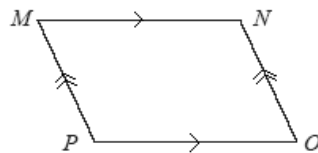
#### กิจกรรมนำเข้าสู่การเรียนรู้

1. ครูทบทวนทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน คือรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกันสองคู่  
กิจกรรมพัฒนาผู้เรียน

### ชั่วโมงที่ 1

2. ครูครูอธิบายทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังต่อไปนี้พร้อมทั้งให้นักเรียนช่วยกันพิสูจน์ทฤษฎีบทเหล่านี้

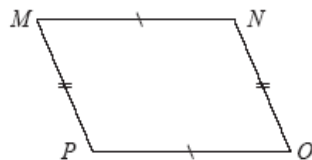
**ทฤษฎีบท** ด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานยาวเท่ากัน



กำหนดให้  $\square$  MNOP เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ดังนั้น  $MN = PO$  และ  $MP = NO$

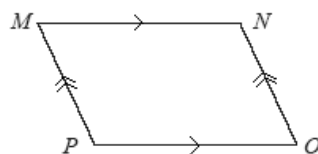
**ทฤษฎีบท** ถ้ารูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้านตรงข้ามยาวเท่ากันสองคู่ แล้วรูปสี่เหลี่ยมรูปนั้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน



กำหนดให้  $MN = PO$  และ  $MP = NO$

ดังนั้น  $\square$  MNOP เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

**ทฤษฎีบท** มุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานมีขนาดเท่ากัน



กำหนดให้  $\square$  MNOP เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ดังนั้น  $\hat{M} = \hat{O}$  และ  $\hat{N} = \hat{P}$

## ชั่วโมงที่ 2

3. ครูครูอธิบายทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังต่อไปนี้พร้อมทั้งให้นักเรียนช่วยกันพิสูจน์ทฤษฎีบทเหล่านี้

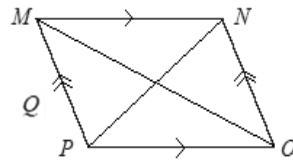
**ทฤษฎีบท 4** ถ้ารูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งมีมุมตรงข้ามที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ แล้วรูปสี่เหลี่ยมรูปนั้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน



กำหนดให้  $\hat{M} = \hat{O}$  และ  $\hat{N} = \hat{P}$

ดังนั้น  $\square MNOP$  เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

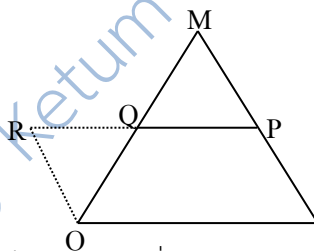
**ทฤษฎีบท 5** เส้นทแยงมุมทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุดตัดของเส้นทแยงมุม



กำหนดให้  $\square MNOP$  เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ดังนั้น  $MQ = QO$  และ  $PQ = QN$

**ทฤษฎีบท 6** ส่วนของเส้นตรงที่ลากเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมใดๆ จะขนานกับด้านที่สามและยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านที่สาม



กำหนดให้  $\triangle MNO$  เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มีจุด P และจุด Q เป็นจุดกึ่งกลางของ  $\overline{MN}$  และ  $\overline{MO}$

ตามลำดับ แล้ว  $\overline{QP} \parallel \overline{ON}$  และ  $QP = \frac{1}{2} ON$

### กิจกรรมรวบยอด

4. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 1.2ข ในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 3 เล่ม 2 โดยครูเป็นผู้แนะนำ

### สื่อ / อุปกรณ์ / แหล่งการเรียนรู้

1. หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2



การวัดและประเมินผล

เป้าหมาย	หลักฐาน	เครื่องมือวัด	เกณฑ์การประเมิน
<b>สาระสำคัญ</b> - การให้เหตุผลทางเรขาคณิต	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ
<b>คุณลักษณะอันพึงประสงค์</b> - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน	- การเข้าเรียน และการทำงาน	- เข้าเรียน - มีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียน	- เข้าเรียนตรงเวลา - เมื่อครูถาม นักเรียนมีความกระตือรือร้นในการตอบ
<b>สมรรถนะ</b> - การแก้ปัญหา - การให้เหตุผล - ความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมาย	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ

Created by Ketum Saraburin , Nattawat Chaiyapong



#### แผนการจัดการเรียนรู้ที่ ๔

หน่วยการเรียนรู้ที่ ๑      การให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม      เรื่อง การสร้าง  
วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม      ชื่อรายวิชา ค ๒๓๒๐๒      กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์  
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ ๓      ภาคเรียนที่ ๒      ปีการศึกษา ๒๕๕๘      เวลา ๒ ชั่วโมง  
ผู้สอน นายณัฐวัฒน์ ไชยโพธิ์      อาจารย์พีเลียง อาจารย์เกตุม สระบุรินทร์

---

#### ผลการเรียนรู้

นักเรียนสามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ได้

#### สาระสำคัญ

นักเรียนรู้วิธีสร้าง

- 1) ส่วนของเส้นตรงให้ยาวเท่ากับหรือแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้
- 2) มุมที่เท่ากับหรือแบ่งครึ่งมุมที่กำหนดให้
- 3) มุมที่มีขนาด  $60^\circ$
- 4) ส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากหรือขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้

#### ทักษะ/กระบวนการ

- 1) การแก้ปัญหา
- 2) การให้เหตุผล
- 3) การสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ

#### ด้านคุณลักษณะ

1. ใฝ่เรียนรู้
2. ทำงานเป็นระบบ รอบคอบ
3. มุ่งในการทำงาน

## กิจกรรมการเรียนรู้

### กิจกรรมนำเข้าสู่การเรียนรู้

1. ครูทบทวนการสร้างทางเรขาคณิตโดยใช้เครื่องมือเพียงสันตรงและวงเวียนในการสร้างรูปเรขาคณิต และการสร้างพื้นฐาน 6 อย่างที่เป็นพื้นฐานของการสร้างรูปเรขาคณิตทั่วไปดังนี้

### กิจกรรมพัฒนาผู้เรียน

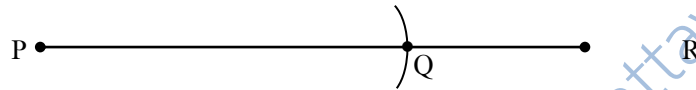
#### ชั่วโมงที่ 1

1.1 การสร้างส่วนของเส้นตรงให้เท่ากับความยาวของส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

กำหนดให้  $\overline{XY}$  เป็นส่วนของเส้นตรง



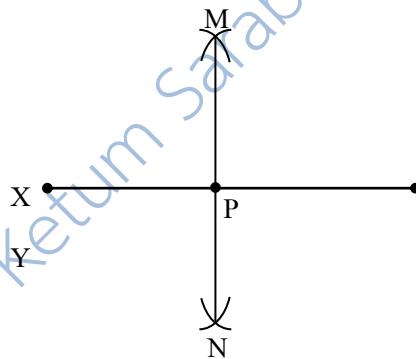
สร้าง  $\overline{PR}$  ให้มีความยาวเท่ากับความยาวของ  $\overline{XY}$  ดังรูป



1.2 การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

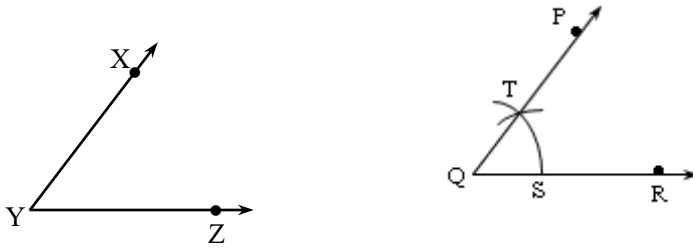
กำหนดให้  $\overline{XY}$  เป็นส่วนของเส้นตรง

สร้าง  $\overline{MN}$  แบ่งครึ่ง  $\overline{XY}$  ที่จุด  $P$  ดังรูป



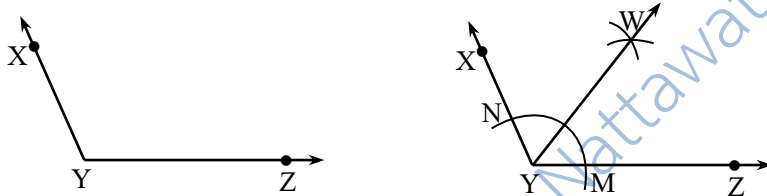
1.3 การสร้างมุมให้มีขนาดเท่ากับมุมที่กำหนดให้

กำหนดให้  $\hat{X}Y\hat{Z}$  เป็นมุมมุมหนึ่ง  
 สร้าง  $\hat{P}Q\hat{R}$  ให้มีขนาดเท่ากับขนาดของ  $\hat{P}Q\hat{R}$  ดังรูป

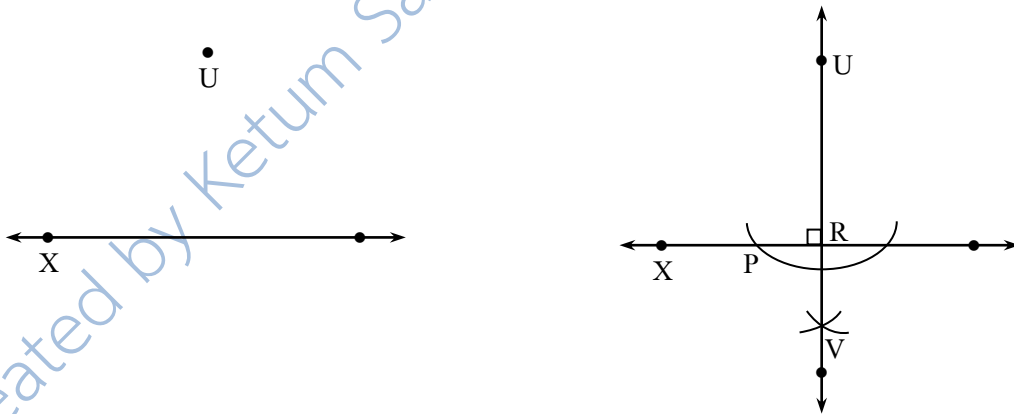


1.4 การแบ่งครึ่งมุมที่กำหนดให้

กำหนดให้  $\hat{X}Y\hat{Z}$  เป็นมุมมุมหนึ่ง  
 สร้าง  $\vec{W}Y$  แบ่งครึ่ง  $\hat{X}Y\hat{Z}$  ทำให้  $\hat{X}Y\hat{W} = \hat{W}Y\hat{Z}$



1.5 การสร้างเส้นตั้งฉากจากจุดภายนอกมายังเส้นตรงที่กำหนดให้  
 กำหนดให้ จุด  $U$  เป็นจุดจุดหนึ่งที่อยู่ภายนอก  $XY$   
 สร้าง



ชั่วโมงที่ 2

2. ครูยกตัวอย่างการสร้างโดยใช้สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน โดยใช้พื้นฐานจากการสร้างที่เคยเรียนมาแล้ว พร้อมทั้งพิสูจน์ สัก 2-3 ตัวอย่าง

กิจกรรมรวบยอด

4. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด ในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติม. 3 เล่ม 2 โดยครูเป็นผู้แนะนำ

สื่อ /อุปกรณ์/ แหล่งการเรียนรู้

1. หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

การวัดและประเมินผล

เป้าหมาย	หลักฐาน	เครื่องมือวัด	เกณฑ์การประเมิน
<b>สาระสำคัญ</b> - การให้เหตุผลทางเรขาคณิต	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ
<b>คุณลักษณะอันพึงประสงค์</b> - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน	- การเข้าเรียน และการทำงาน	- เข้าเรียน - มีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนรู้	- เข้าเรียนตรงเวลา - เมื่อครูถาม นักเรียนมีความกระตือรือร้นในการตอบ
<b>สมรรถนะ</b> - การแก้ปัญหา - การให้เหตุผล - ความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมาย	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ

Created by Ketum Saraburin , Nattawat Chuyapao



### แผนการจัดการเรียนรู้ที่ ๑

หน่วยการเรียนรู้ที่ ๒ ระบบสมการ เรื่อง ระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นและสมการดีกรีสอง  
วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชื่อรายวิชา ค ๒๓๒๐๒ กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์  
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ ๓ ภาคเรียนที่ ๒ ปีการศึกษา ๒๕๕๘ เวลา ๒ ชั่วโมง  
ผู้สอน นายณัฐวัฒน์ ไชยโพธิ์ อาจารย์พีเลี้ยง อาจารย์เกตุม สระบุรินทร์

#### ผลการเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถแก้ระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นและสมการดีกรีสองที่กำหนดให้โดยใช้สมบัติของการเท่ากันได้
2. นักเรียนสามารถตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้

#### สาระสำคัญ

ระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นและสมการดีกรีสองจะมีรูปทั่วไป ดังนี้

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

$$Px + Qy + R = 0$$

เมื่อ  $x, y$  เป็นตัวแปร และ  $A, B, C, D, E, F, P, Q, R$  เป็นจำนวนจริง โดยที่  $A, B, C$  ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันและ  $P, Q$  ไม่เท่ากับศูนย์พร้อมกัน

ในที่นี้  $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$  เป็นรูปทั่วไปของสมการดีกรีสอง และ  $Px + Qy + R = 0$  เป็นรูปทั่วไปของสมการเชิงเส้น

คำตอบของระบบสมการข้างต้นคือ คู่อันดับ  $(a, b)$  ที่สอดคล้องกับสมการทั้งสองของระบบสมการหรือคู่อันดับ  $(a, b)$  ที่เมื่อแทน  $x$  ด้วย  $a$  และแทน  $y$  ด้วย  $b$  ในสมการทั้งสองของระบบสมการ แล้วทำให้สมการทั้งสองนั้นเป็นจริง

การแก้ระบบสมการ คือ การหาคำตอบของระบบสมการ

#### ทักษะ/กระบวนการ

- 1) การแก้ปัญหา
- 2) การให้เหตุผล
- 3) การสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ

## ด้านคุณลักษณะ

1. ใฝ่เรียนรู้
2. ทำงานเป็นระบบ รอบคอบ
3. มุ่งในการทำงาน

## กิจกรรมการเรียนรู้

### ชั่วโมงที่ 1

#### กิจกรรมนำเข้าสู่การเรียนรู้

4. ครูทบทวนความรู้เรื่องการแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้ว โดยยกตัวอย่าง พร้อมกับถามตอบ

#### กิจกรรมพัฒนาผู้เรียน

5. ครูอธิบายเกี่ยวกับ ระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นและสมการดีกรีสองพร้อมยกตัวอย่างดังนี้

ระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นและสมการดีกรีสองจะมีรูปทั่วไป ดังนี้

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

$$Px + Qy + R = 0$$

เมื่อ  $x, y$  เป็นตัวแปร และ  $A, B, C, D, E, F, P, Q, R$  เป็นจำนวนจริง โดยที่  $A, B, C$  ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันและ  $P, Q$  ไม่เท่ากับศูนย์พร้อมกัน

ในที่นี้  $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$  เป็นรูปทั่วไปของสมการดีกรีสอง และ  $Px + Qy + R = 0$  เป็นรูปทั่วไปของสมการเชิงเส้น

คำตอบของระบบสมการข้างต้นคือ คู่อันดับ  $(a, b)$  ที่สอดคล้องกับสมการทั้งสองของระบบสมการ หรือคู่อันดับ  $(a, b)$  ที่เมื่อแทน  $x$  ด้วย  $a$  และแทน  $y$  ด้วย  $b$  ในสมการทั้งสองของระบบสมการแล้วทำให้สมการทั้งสองนั้นเป็นจริง

การแก้ระบบสมการ คือ การหาคำตอบของระบบสมการ

ซึ่งเราสามารถหาคำตอบของระบบสมการโดยใช้สมบัติของการเท่ากัน ซึ่งได้แก่ สมบัติสมมาตร สมบัติถ่ายทอด สมบัติการบวกและสมบัติการคูณ การหาคำตอบของระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นและสมการดีกรีสอง เรานิยมเขียนตัวแปรตัวหนึ่งในสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปของตัวแปรอีกตัวหนึ่ง แล้วนำตัวแปรนั้นไปแทนค่าในสมการดีกรีสอง โดยใช้หลักการแทนค่าซึ่งเป็นการใช้สมบัติของการเท่ากันในการแก้สมการ ทั้งนี้เพื่อให้ได้สมการดีกรีสองที่มีตัวแปรเพียงตัวเดียว ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1 จงหาคำตอบของระบบสมการต่อไปนี้

$$1. \quad x + y = 2 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$y - x^2 = 0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

จากสมการ (1) เขียน  $y$  ในรูปของ  $x$

$$\text{จะได้} \quad y = 2 - x$$

แทน  $y$  ด้วย  $2 - x$  ในสมการ (2)

$$\text{จะได้} \quad (2 - x) - x^2 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$\text{ดังนั้น} \quad x + 2 = 0 \quad \text{หรือ} \quad x - 1 = 0$$

$$\text{จะได้} \quad x = -2 \quad \text{หรือ} \quad x = 1$$

แทน  $x$  ด้วย  $-2$  ในสมการ  $y = 2 - x$

$$\text{จะได้} \quad y = 2 - (-2)$$

$$y = 4$$

แทน  $x$  ด้วย  $1$  ในสมการ  $y = 2 - x$

$$\text{จะได้} \quad y = 2 - 1$$

$$y = 1$$

ดังนั้นคำตอบของระบบสมการเป็น  $(-2, 4)$  และ  $(1, 1)$

(ให้นักเรียนช่วยกันตรวจสอบคำตอบ)

ตัวอย่าง 2 กำหนดให้  $x^2 - y = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$

$$2x - y = 1 \quad \dots\dots\dots(2)$$

จากสมการ (2) เขียน  $y$  ในรูปของ  $x$

$$\text{จะได้} \quad y = 2x - 1$$

แทน  $y$  ด้วย  $2x - 1$  ในสมการ (1)

$$\text{จะได้} \quad x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)(x - 1) = 0$$

$$\text{ดังนั้น} \quad x - 1 = 0$$

$$\text{จะได้} \quad x = 1$$

แทน  $x$  ด้วย  $1$  ในสมการ  $y = 2x - 1$

$$y = 2(1) - 1$$

$$y = 1$$

ดังนั้นคำตอบของระบบสมการคือ  $(1, 1)$



ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้  $y = x^2 + 2x + 5$  ..... (1)  
 $y - x = 3$  ..... (2)

จากสมการ (2) เขียน  $y$  ในรูปของ  $x$

จะได้  $y = 3 + x$

แทน  $y$  ด้วย  $3 + x$  ในสมการ (1)

จะได้  $3 + x = x^2 + 2x + 5$

$x^2 + x + 2 = 0$

ในที่นี้  $a = 1$ ,  $b = 1$  และ  $c = 2$

จะได้  $b^2 - 4ac = 1^2 - 4(1)(2) = -7$

เนื่องจาก  $b^2 - 4ac < 0$

ดังนั้น ระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ

เปรียบเทียบ  $x^2 + x + 2 = 0$   
 กับรูปทั่วไป  $ax^2 + bx + c = 0$

3. ครูอธิบายว่า จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่า ระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นและสมการ  
 ดีกรีสองอาจมีคำตอบสองคำตอบ มีคำตอบเดียว หรือไม่มีคำตอบก็ได้

**กิจกรรมรวบยอด**

- ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 2.1 ในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติม. 3 เล่ม 2
- ทำใบงานที่ 3

**สื่อ / อุปกรณ์/ แหล่งการเรียนรู้**

- ใบงานที่ 1
- หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

**การวัดและประเมินผล**

เป้าหมาย	หลักฐาน	เครื่องมือวัด	เกณฑ์การประเมิน
<b>สาระสำคัญ</b> - การแก้ระบบสมการ คือ การหาคำตอบของระบบสมการ	- ใบงานที่ 1	- ใบงานที่ 1	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ
<b>คุณลักษณะอันพึงประสงค์</b> - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน	- การเข้าเรียน และการทำงาน	- เข้าเรียน - มีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียน	- เข้าเรียนตรงเวลา - เมื่อครูถาม นักเรียนมีความกระตือรือร้นในการตอบ
<b>สมรรถนะ</b> - การแก้ปัญหา - การให้เหตุผล - ความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมาย	- ใบงานที่ 1	- ใบงานที่ 1	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ



## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ ๒

หน่วยการเรียนรู้ที่ ๒ ระบบสมการ เรื่อง ระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการดีกรีสองทั้งสองสมการ  
วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชื่อรายวิชา ค ๒๓๒๐๒ กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์  
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ ๓ ภาคเรียนที่ ๒ ปีการศึกษา ๒๕๕๘ เวลา ๑ ชั่วโมง  
ผู้สอน นายณัฐวัฒน์ ไชยโพธิ์ อาจารย์พีเลี้ยง อาจารย์เกตุม สระบุรินทร์

---

### ผลการเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถแก้ระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการดีกรีสองทั้งสองสมการที่กำหนดให้โดยใช้สมบัติของการเท่ากันได้
2. ตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้

### สาระสำคัญ

ในเรื่องนี้จะกล่าวถึงระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการดีกรีสองทั้งสองสมการ และทั้งสองสมการจะมีตัวแปรของแต่ละพจน์ปรากฏอยู่เพียง 2 แบบ จาก 5 แบบต่อไปนี้  $x^2, y^2, xy, x, y$

### ทักษะ/กระบวนการ

- 1) การแก้ปัญหา
- 2) การให้เหตุผล
- 3) การสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ

### ด้านคุณลักษณะ

1. ใฝ่เรียนรู้
2. ทำงานเป็นระบบ รอบคอบ
3. มุ่งในการทำงาน

## กิจกรรมการเรียนรู้

### กิจกรรมนำเข้าสู่การเรียนรู้

6. ครูทบทวนความรู้เรื่องการแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้ว โดยยกตัวอย่าง พร้อมกับถามตอบ

### กิจกรรมพัฒนาผู้เรียน

7. ครูอธิบายเกี่ยวกับระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการดีกรีสองทั้งสองสมการ และทั้งสองสมการจะมีตัวแปรของแต่ละพจน์ปรากฏอยู่เพียง 2 แบบ จาก 5 แบบต่อไปนี้  $x^2, y^2, xy, x, y$

ซึ่งจะเห็นว่าระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการดีกรีสองทั้งสองสมการอาจมีคำตอบสองคำตอบ มีคำตอบเดียว หรือไม่มีคำตอบก็ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้ระบบสมการ

$$x^2 + y^2 = 13$$

$$x^2 - y^2 = -5$$

วิธีทำ

$$x^2 + y^2 = 13 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$x^2 - y^2 = -5 \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$(1) + (2); \quad 2x^2 = 8$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

แทน  $x$  ด้วย 2 ใน (1)

จะได้

$$2^2 + y^2 = 13$$

$$y^2 = 9$$

$$y = \pm 3$$

แทน  $x$  ด้วย  $-2$  ใน (1)

จะได้

$$(-2)^2 + y^2 = 13$$

$$y^2 = 9$$

$$y = \pm 3$$

ดังนั้นคำตอบของระบบสมการคือ  $(2,3), (2,-3), (-2,3)$  และ  $(-2,-3)$

ตอบ  $(2,3), (2,-3), (-2,3)$  และ  $(-2,-3)$

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้ระบบสมการ

วิธีทำ

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 25 \\2x^2 + 3y^2 &= 50 \\x^2 + y^2 &= 25 && \dots\dots\dots(1) \\2x^2 + 3y^2 &= 50 && \dots\dots\dots(2) \\(1) \times 2 &; && 2x^2 + 2y^2 = 50 && \dots\dots\dots(3) \\(2) - (3) &; && y^2 = 0 \\&&& y = 0\end{aligned}$$

แทน  $y$  ด้วย  $0$  ในสมการ (1)

จะได้

$$\begin{aligned}x^2 + 0^2 &= 25 \\x^2 &= 25 \\x &= \pm 5\end{aligned}$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ  $(5,0)$  และ  $(-5,0)$

ตัวอย่างที่ 3 จงแก้ระบบสมการ

วิธีทำ

$$\begin{aligned}x^2 + xy &= -3 \\x^2 - 5xy &= 10 \\x^2 + xy &= -3 && \dots\dots\dots(1) \\x^2 - 5xy &= 10 && \dots\dots\dots(2) \\(1) \times 5 &; && 5x^2 + 5xy = -15 && \dots\dots\dots(3) \\(2) + (3) &; && 6x^2 = -5 \\&&& x^2 = \frac{-5}{6}\end{aligned}$$

เนื่องจาก  $\frac{-5}{6} < 0$

ดังนั้น ไม่มีจำนวนจริงใดเป็นคำตอบของสมการ  $x^2 = \frac{-5}{6}$

นั่นคือ ระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ

ตอบ ไม่มีคำตอบ

#### กิจกรรมรวบยอด

4. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 2.2 ในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติม. 3 เล่ม 2
5. ทำใบงานที่ 4

#### สื่อ /อุปกรณ์/ แหล่งการเรียนรู้

1. ใบงานที่ 2
2. หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

การวัดและประเมินผล

เป้าหมาย	หลักฐาน	เครื่องมือวัด	เกณฑ์การประเมิน
<b>สาระสำคัญ</b> - ระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการดีกรีสองทั้งสองสมการ	- ใบงานที่ 2	- ใบงานที่ 2	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ
<b>คุณลักษณะอันพึงประสงค์</b> - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน	- การเข้าเรียน และการทำงาน	- เข้าเรียน - มีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียน	- เข้าเรียนตรงเวลา - เมื่อครูถาม นักเรียนมีความกระตือรือร้นในการตอบ
<b>สมรรถนะ</b> - การแก้ปัญหา - การให้เหตุผล - ความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมาย	- ใบงานที่ 2	- ใบงานที่ 2	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ

Created by Ketum Saraburin , Nattawat Chaiyo



## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ ๑

หน่วยการเรียนรู้ที่ ๓	วงกลม	เรื่อง วงกลม
วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม	ชื่อรายวิชา ค ๒๓๒๐๒	กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ ๓	ภาคเรียนที่ ๒	ปีการศึกษา ๒๕๕๘
ผู้สอน นายณัฐวัฒน์ ไชยโพธิ์		เวลา ๑ ชั่วโมง
		อาจารย์พี่เลี้ยง อาจารย์เกตุม สระบุรีรินทร์

### ผลการเรียนรู้

นักเรียนสามารถระบุส่วนต่าง ๆ ที่กำหนดให้เกี่ยวกับวงกลมได้

### สาระสำคัญ

วงกลม เป็นรูปเรขาคณิตบนระนาบซึ่งแต่ละจุดบนรูปเรขาคณิตนี้ อยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งบนระนาบเดียวกันเป็นระยะเท่ากัน เรียกจุดคงที่นี้ว่า จุดศูนย์กลางของวงกลม เรียกระยะที่เท่ากันนี้ว่า รัศมีของวงกลม

รัศมีของวงกลม หมายถึงระยะระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลมและจุดบนวงกลมหรือหมายถึงส่วนของเส้นตรงที่มีจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นจุดปลาย

คอร์ด คือส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายทั้งสองอยู่บนวงกลมเดียวกันคอร์ดแต่ละเส้นจะแบ่งวงกลมออกเป็นส่วนโค้งสองส่วนโค้ง

เส้นตัดวงกลม คือ เส้นตรงที่ตัดวงกลมสองจุด

เส้นสัมผัสวงกลม คือ เส้นตรงที่ตัดวงกลมเพียงจุดเดียวเท่านั้นและเรียกจุดตัดนั้นว่า จุดสัมผัส

มุมที่จุดศูนย์กลาง คือ มุมที่มีจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นจุดยอดมุมและแขนทั้งสองของมุมตัดวงกลม

มุมในส่วนโค้ง คือมุมที่มีจุดยอดมุมอยู่บนวงกลม และแขนทั้งสองของมุมตัดวงกลม

มุมในครึ่งวงกลม คือ มุมที่มีจุดยอดมุมอยู่บนวงกลม และแขนทั้งสองของมุมผ่านจุดปลายทั้งสองของเส้นผ่านศูนย์กลางเส้นหนึ่ง

### ทักษะ/กระบวนการ

- 1) การแก้ปัญหา
- 2) การให้เหตุผล
- 3) การสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ

## ด้านคุณลักษณะ

1. ใฝ่เรียนรู้
2. ทำงานเป็นระบบ รอบคอบ
3. มุ่งในการทำงาน

## กิจกรรมการเรียนรู้

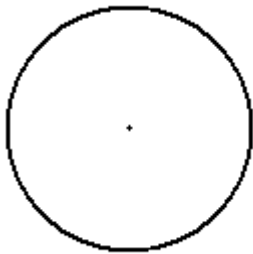
### ชั่วโมงที่ 1

#### กิจกรรมนำเข้าสู่การเรียนรู้

8. ครูสนทนากับนักเรียนเกี่ยวกับวงกลมที่ปรากฏอยู่ในสิ่งแวดล้อมรอบตัว เช่น ล้อรถ ปากแก้วน้ำ ทรงกระบอก กำไลข้อมือ และฝากระป๋องนม

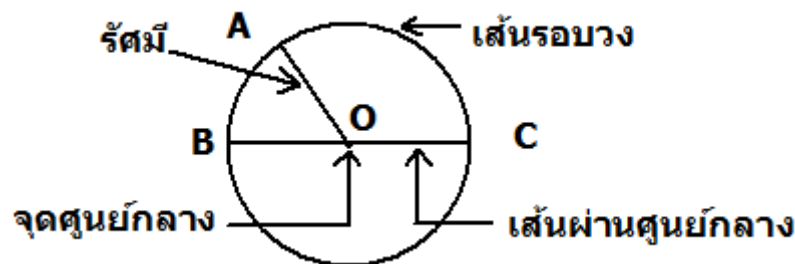
#### กิจกรรมพัฒนาผู้เรียน

9. ครูอธิบายถึงลักษณะและสมบัติบางประการของวงกลมดังต่อไปนี้



วงกลม เป็นรูปเรขาคณิตบนระนาบซึ่งแต่ละจุดบนรูปเรขาคณิตนี้ อยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งบนระนาบเดียวกันเป็นระยะเท่ากัน เรียกระยะที่เท่ากันนี้ว่า รัศมีของวงกลม

ส่วนต่างๆเกี่ยวกับวงกลมมีดังนี้



จากรูป จุด  $O$  เป็นจุดคงที่ เรียกว่าจุด  $O$  ว่าจุดศูนย์กลางของวงกลม จุด  $A$  อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม หรือกล่าวได้ว่า จุด  $A$  อยู่บนวงกลม เรียก  $\overline{OA}$  ว่า รัศมีของวงกลม

จุด  $B$  และจุด  $C$  อยู่บนวงกลม และ  $\overline{BC}$  ผ่านจุดศูนย์กลาง  $O$  เรียก  $\overline{BC}$  ว่าเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม

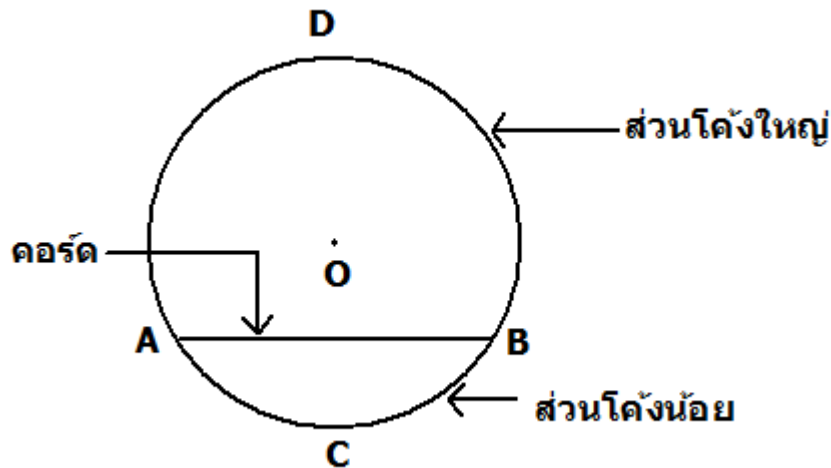
การเรียกชื่อวงกลมวงหนึ่งที่มีจุดศูนย์กลางตามที่กำหนดให้ อาจเรียกชื่อตามชื่อของจุดศูนย์กลางของวงกลมนั้น เช่น วงกลมที่มีจุด  $O$  เป็นจุดศูนย์กลาง อาจเรียกว่า วงกลม  $O$

รัศมีของวงกลม หมายถึงระยะระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลมและจุดบนวงกลม หรือหมายถึงส่วนของเส้นตรงที่มีจุดศูนย์กลางและจุดบนวงกลมเป็นจุดปลาย

วงกลมสองวงที่มีรัศมียาวเท่ากัน สามารถเลื่อนให้วงกลมสองวงนั้นทับกันได้สนิท จึงกล่าวได้ว่า วงกลมสองวงที่มีรัศมียาวเท่ากัน จะเท่ากันทุกประการ

10. ครูอธิบายว่า นอกจากส่วนต่างๆของวงกลมที่กล่าวมาข้างต้นแล้ว ยังมีส่วนอื่นๆที่เกี่ยวกับวงกลมที่สำคัญได้แก่ คอร์ด เส้นตัดวงกลม และเส้นสัมผัสวงกลม ในทางคณิตศาสตร์ให้ความหมายไว้ดังนี้

คอร์ด คือส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายทั้งสองอยู่บนวงกลมเดียวกันคอร์ดแต่ละเส้นจะแบ่งวงกลมออกเป็นสองโค้งสองส่วนโค้ง ดังรูป



จากรูป  $\overline{AB}$  เป็น คอร์ดของวงกลม  $O$

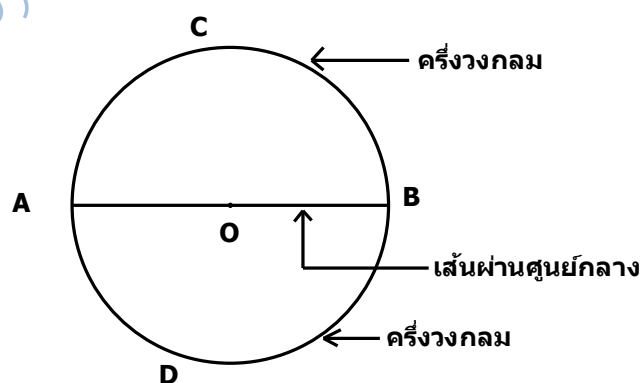
เรียกส่วนโค้ง  $ADB$  ว่า ส่วนโค้งใหญ่  $AB$  เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $ADB$

เรียกส่วนโค้ง  $ACB$  ว่า ส่วนโค้งน้อย  $AB$  เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $ACB$  หรือ  $AB$

ความยาวของ  $ADB$  เขียนแทนด้วย  $m(ADB)$

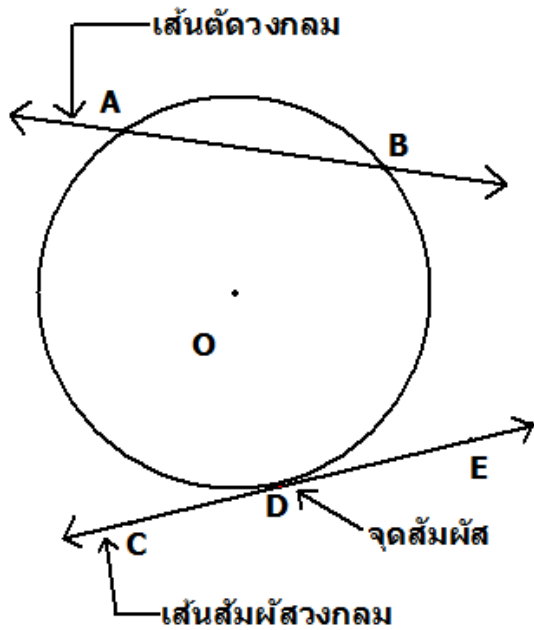
ความยาวของ  $ACB$  เขียนแทนด้วย  $m(ACB)$  หรือ ความยาวของ  $AB$  เขียนแทนด้วย  $m(AB)$

เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมเป็นคอร์ดของวงกลมเป็นคอร์ดที่ยาวที่สุดซึ่งแบ่งวงกลมออกเป็นสองโค้งสองส่วนโค้งที่เท่ากันทุกประการ เรียกส่วนโค้งแต่ละส่วนว่าครึ่งวงกลมดังรูป



จากรูป  $ACB$  และ  $ADB$  แต่ละส่วนโค้งเป็นครึ่งวงกลมของวงกลม  $O$  และ  $m(ACB) = m(ADB)$





เส้นตัดวงกลม คือ เส้นตรงที่ตัดวงกลมสอง

จุด

จากรูป  $\overline{AB}$  เป็นเส้นตัดวงกลม  $O$  ที่จุด  $A$  และจุด  $B$  บนวงกลม

เส้นสัมผัสวงกลม คือ เส้นตรงที่ตัดวงกลมเพียงจุดเดียวเท่านั้นและเรียกจุดตัดนั้นว่า จุดสัมผัส  
จากรูป  $\overline{CE}$  เป็นเส้นสัมผัสวงกลม  $O$  ที่จุด  $D$

กิจกรรมรวบยอด

4. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรม บอกได้ไหม ในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

สื่อ /อุปกรณ์/ แหล่งการเรียนรู้

หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

การวัดและประเมินผล

เป้าหมาย	หลักฐาน	เครื่องมือวัด	เกณฑ์การประเมิน
<b>สาระสำคัญ</b> - วงกลม	- กิจกรรม บอกได้ไหม	- กิจกรรม บอกได้ไหม	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ
<b>คุณลักษณะอันพึงประสงค์</b> - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน	- การเข้าเรียน และการทำงาน	- เข้าเรียน - มีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียน	- เข้าเรียนตรงเวลา - เมื่อครูถาม นักเรียนมีความกระตือรือร้นในการตอบ
<b>สมรรถนะ</b> - การแก้ปัญหา - การให้เหตุผล - ความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมาย	- กิจกรรม บอกได้ไหม	- กิจกรรม บอกได้ไหม	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ

Created by Ketum Saraburin , Nattawat Chayapao



## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ ๒

หน่วยการเรียนรู้ที่ ๓	วงกลม	เรื่อง มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม	
วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม	ชื่อรายวิชา ค ๒๓๒๐๒	กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์	
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ ๓	ภาคเรียนที่ ๒	ปีการศึกษา ๒๕๕๘	เวลา ๑ ชั่วโมง
ผู้สอน นายณัฐวัฒน์ ไชยโพธิ์		อาจารย์พีเลียง อาจารย์เกตุม สระบุรีรินทร์	

### ผลการเรียนรู้

นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทหรือสมบัติของวงกลมที่เกี่ยวกับมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลมไปใช้ได้

### สาระสำคัญ

ทฤษฎีบท มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90 องศาหรือหนึ่งมุมฉาก

### ทักษะ/กระบวนการ

- 1) การแก้ปัญหา
- 2) การให้เหตุผล
- 3) การสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ

### ด้านคุณลักษณะ

1. ใฝ่เรียนรู้
2. ทำงานเป็นระบบ รอบคอบ
3. มุ่งในการทำงาน

## กิจกรรมการเรียนรู้

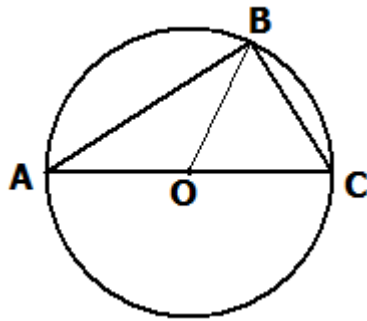
### ชั่วโมงที่ 1

#### กิจกรรมนำเข้าสู่การเรียนรู้

11. ครูทบทวนเรื่องการพิสูจน์และการให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้ว โดยการถามตอบ

#### กิจกรรมพัฒนาผู้เรียน

12. ครูอธิบายเกี่ยวกับ ทฤษฎีบทที่ว่า มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90 องศาหรือหนึ่งมุมฉาก พร้อมกับการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ดังต่อไปนี้



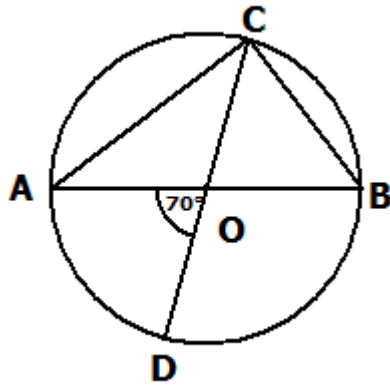
กำหนดให้ จุด  $O$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และ  $\widehat{ABC}$  เป็นมุมในครึ่งวงกลม  
ต้องการพิสูจน์ว่า  $\widehat{ABC}$  มีขนาด  $90^\circ$  หรือ หนึ่งมุมฉาก  
พิสูจน์ ลาก  $\overline{BO}$

ข้อความ	เหตุผล
1. $AO = BO = CO$	1. รัศมีของวงกลมเดียวกันยาวเท่ากัน
2. $\triangle AOB$ และ $\triangle COB$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	2. มีด้านประกอบมุมยอดยาวเท่ากัน
3. $\widehat{BAO} = \widehat{ABO}$ และ $\widehat{BCO} = \widehat{CBO}$	3. มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วขนาดเท่ากัน
4. $\widehat{BAO} + \widehat{ABO} + \widehat{BCO} + \widehat{CBO} = 180^\circ$	4. ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ $180^\circ$
5. $2(\widehat{ABO}) + 2(\widehat{CBO}) = 180^\circ$	5. แทนมุมที่มีขนาดเท่ากัน
6. $\widehat{ABO} + \widehat{CBO} = 90^\circ$	6. สมบัติของการเท่ากัน
7. $\widehat{ABC} = 90^\circ$	7. สมบัติของการเท่ากัน
8. นั่นคือ $\widehat{ABC}$ มีขนาด $90^\circ$ หรือหนึ่งมุมฉาก	

จากการพิสูจน์ข้างต้น ทำให้ได้ทฤษฎีบทเพื่อใช้ในการอ้างอิงให้เหตุผลทางเรขาคณิตต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90 องศาหรือหนึ่งมุมฉาก**

13. ครูยกตัวอย่างที่เกี่ยวข้องกับการใช้ทฤษฎีบทข้างต้นในการพิสูจน์ดังตัวอย่างต่อไปนี้  
 ตัวอย่างที่ 1 จากรูปจุด  $O$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม  $\widehat{ACB}$  เป็นมุมในครึ่งวงกลมและ  $\widehat{AOD} = 70^\circ$   
 จงหาขนาดของ  $\widehat{BCO}$  พร้อมแสดงเหตุผล



ข้อความ	เหตุผล
1. $AO = CO$	1. รัศมีวงกลมเดียวกันยาวเท่ากัน
2. จะได้ $\triangle ACO$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	2. มีด้านประกอบมุมยอดยาวเท่ากัน
3. ดังนั้น $\widehat{ACO} = \widehat{CAO}$	3. มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน
4. เนื่องจาก $\widehat{AOD} = \widehat{ACO} + \widehat{CAO}$	4. ขนาดของมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอก
5. จะได้ $\widehat{AOD} = 2(\widehat{ACD})$	5. แทนมุมที่มีขนาดเท่ากัน
6. หรือ $\widehat{ACO} = \frac{\widehat{AOD}}{2}$	6. สมบัติของการเท่ากัน
7. $\widehat{AOD} = 70^\circ$	7. กำหนดให้
8. $\widehat{ACO} = 35^\circ$	8. สมบัติของการเท่ากัน
9. $\widehat{BCO} + \widehat{ACO} = 90^\circ$	9. มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด $90^\circ$
10. $\widehat{BCO} + 35^\circ = 90^\circ$	10. แทน $\widehat{ACO}$ ด้วย $35^\circ$
11. $\widehat{BCO} = 90 - 35 = 55^\circ$	11. สมบัติของการเท่ากัน
12. นั่นคือ $\widehat{BCO}$ มีขนาด $55^\circ$	

#### กิจกรรมรวบยอด

4. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 3.2ก ในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2  
 สื่อ / อุปกรณ์ / แหล่งการเรียนรู้  
 หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

การวัดและประเมินผล

เป้าหมาย	หลักฐาน	เครื่องมือวัด	เกณฑ์การประเมิน
<b>สาระสำคัญ</b> - มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90 องศาหรือหนึ่งมุมฉาก	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ
<b>คุณลักษณะอันพึงประสงค์</b> - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน	- การเข้าเรียน และการทำงาน	- เข้าเรียน - มีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียน	- เข้าเรียนตรงเวลา - เมื่อครูถาม นักเรียนมีความกระตือรือร้นในการตอบ
<b>สมรรถนะ</b> - การแก้ปัญหา - การให้เหตุผล - ความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมาย	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ

Created by Ketum Saraburin , Nattawat Chaiyapoo



### แผนการจัดการเรียนรู้ที่ ๓

หน่วยการเรียนรู้ที่ ๓	วงกลม	เรื่อง มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม
วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม	ชื่อรายวิชา ค ๒๓๒๐๒	กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ ๓	ภาคเรียนที่ ๒	ปีการศึกษา ๒๕๕๘
ผู้สอน นายณัฐวัฒน์ ไชยโพธิ์		เวลา ๑ ชั่วโมง
		อาจารย์พีเลียง อาจารย์เกตุม สระบุรีรินทร์

#### ผลการเรียนรู้

นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทหรือสมบัติของวงกลมที่เกี่ยวกับมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมไปใช้ได้

#### สาระสำคัญ

ทฤษฎีบท ในวงกลมเดียวกัน มุมที่จุดศูนย์กลาง จะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน

#### ทักษะ/กระบวนการ

- 1) การแก้ปัญหา
- 2) การให้เหตุผล
- 3) การสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ

#### ด้านคุณลักษณะ

1. ใฝ่เรียนรู้
2. ทำงานเป็นระบบ รอบคอบ
3. มุ่งในการทำงาน

## กิจกรรมการเรียนรู้

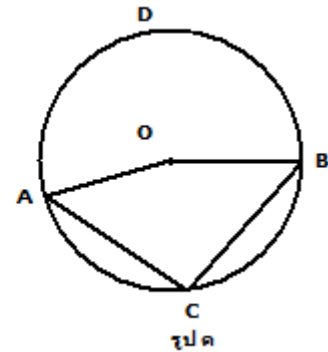
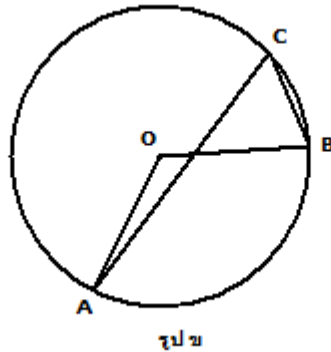
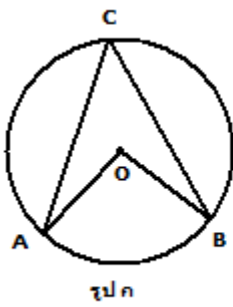
### กิจกรรมนำเข้าสู่การเรียนรู้

14. ครูทบทวนเกี่ยวกับทฤษฎีบทวงกลมที่เคยเรียนมาแล้วโดยการ ถาม ตอบ

### กิจกรรมพัฒนาผู้เรียน

15. ครูอธิบายเกี่ยวกับมุมที่จุดศูนย์กลางดังนี้คือ

กำหนดให้จุด  $O$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่มีรัศมียาวต่างกันดังรูปต่อไปนี้



จากรูป  $A\hat{O}B$  เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางและ  $A\hat{C}B$  เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่ต่างรองรับด้วยส่วนโค้ง  $AB$  เดียวกัน

รูป ก และรูป ข  $A\hat{O}B$  และ  $A\hat{C}B$  ต่างรองรับด้วย  $AB$  เดียวกัน

รูป ค มุมกลับ  $A\hat{O}B$  และ  $A\hat{C}B$  ต่างรองรับด้วย  $ADB$  เดียวกัน

16. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

3.1 สร้างวงกลม 3 วงให้มีรัศมีต่างกัน แล้วสร้างมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน ดังตัวอย่างข้างต้น

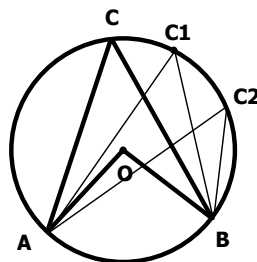
3.2 ตัดมุมที่จุดศูนย์กลางของแต่ละวงกลมในข้อ 1

3.3 พับครึ่งมุมแต่ละมุมในข้อ 2 แล้วเลื่อนมุมที่ได้ไปทับมุมในส่วนโค้งของวงกลมของแต่ละวงที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน นักเรียนสามารถจัดมุมให้ทับกันสนิทได้หรือไม่

3.4 จากกิจกรรมในข้อ 3 นักเรียนพบความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางกับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งกันเป็นอย่างไร

3.5 จากรูป ก ให้นักเรียนสร้างมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วย  $AB$  อีกสองมุม เช่น

$A\hat{C}_1B$  และ  $A\hat{C}_2B$  ดังรูป





3.6 นักเรียนใช้มุมที่พบได้จากรูป ก ในข้อ 3 ไปทับ  $AC_1B$  และ  $AC_2B$  จะสามารถเลื่อนให้ทับกันสนิทได้หรือไม่

3.7 นักเรียนยังได้ความสัมพันธ์เช่นเดียวกันกับข้อ 4 หรือไม่

3.8 ให้นักเรียนทำกิจกรรมเช่นเดียวกับข้อ 5 และข้อ 6 กับวงกลมรูป ข และรูป ค ผลที่ได้เป็นอย่างไร

3.9 นักเรียนคาดการณ์ว่าในวงกลมวงเดียวกัน มุมที่จุดศูนย์กลาง จะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน หรือไม่

ข้อความคาดการณ์ของนักเรียนข้างต้นสามารถพิสูจน์ได้ว่าเป็นจริง ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบทที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้โดยไม่แสดงการพิสูจน์

**ทฤษฎีบท** ในวงกลมเดียวกัน มุมที่จุดศูนย์กลาง จะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน

#### กิจกรรมรวบยอด

4. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด ในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

#### สื่อ /อุปกรณ์/ แหล่งการเรียนรู้

หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

#### การวัดและประเมินผล

เป้าหมาย	หลักฐาน	เครื่องมือวัด	เกณฑ์การประเมิน
<b>สาระสำคัญ</b> - มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ
<b>คุณลักษณะอันพึงประสงค์</b> - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน	- การเข้าเรียน และการทำงาน	- เข้าเรียน - มีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียน	- เข้าเรียนตรงเวลา - เมื่อครูถาม นักเรียนมีความกระตือรือร้นในการตอบ
<b>สมรรถนะ</b> - การแก้ปัญหา - การให้เหตุผล - ความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมาย	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ



## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ ๔

หน่วยการเรียนรู้ที่ ๓	วงกลม	เรื่อง มุมในส่วนโค้งของวงกลม
วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม	ชื่อรายวิชา ค ๒๓๒๐๒	กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ ๓	ภาคเรียนที่ ๒	ปีการศึกษา ๒๕๕๘
ผู้สอน นายณัฐวัฒน์ ไชยโพธิ์		เวลา ๑ ชั่วโมง
		อาจารย์พี่เลี้ยง อาจารย์เกตุม์ สระบุรีนทร์

### ผลการเรียนรู้

นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทหรือสมบัติของวงกลมที่เกี่ยวกับมุมในส่วนโค้งของวงกลมไปใช้ได้

### สาระสำคัญ

ทฤษฎีบท ในวงกลมเดียวกัน มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันจะมีขนาดเท่ากัน

### ทักษะ/กระบวนการ

- 1) การแก้ปัญหา
- 2) การให้เหตุผล
- 3) การสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ

### ด้านคุณลักษณะ

1. ใฝ่เรียนรู้
2. ทำงานเป็นระบบ รอบคอบ
3. มุ่งในการทำงาน

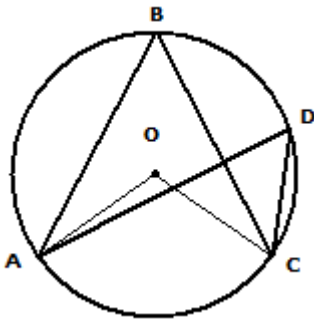
## กิจกรรมการเรียนรู้

### กิจกรรมนำเข้าสู่การเรียนรู้

17. ครูทบทวนเกี่ยวกับทฤษฎีบทวงกลมที่เคยเรียนมาแล้วโดยการ ถาม ตอบ

### กิจกรรมพัฒนาผู้เรียน

18. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้คือ



กำหนดให้จุด  $O$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม  $ABC$  และ

$\widehat{ADC}$  เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วย  $AC$  เดียวกัน ลาก  $\overline{AO}$  และ  $\overline{CO}$

1.1 ขนาดของ  $\widehat{AOC}$  เกี่ยวข้องกับขนาดของ  $\widehat{ABC}$  อย่างไร

1.2 ขนาดของ  $\widehat{AOC}$  เกี่ยวข้องกับขนาดของ  $\widehat{ADC}$  อย่างไร

1.3 ขนาดของ  $\widehat{ABC}$  เกี่ยวข้องกับขนาดของ  $\widehat{ADC}$  อย่างไร

1.4 นักเรียนพบความสัมพันธ์ระหว่างมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันเป็นอย่างไร

1.5 นักเรียนคาดการณ์ว่า ในวงกลมเดียวกัน มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน จะมีขนาดเท่ากัน

ข้อความคาดการณ์ของนักเรียนข้างต้นสามารถพิสูจน์ได้ว่าเป็นจริง ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบทที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้โดยไม่แสดงการพิสูจน์

ทฤษฎีบท ในวงกลมเดียวกัน มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันจะมีขนาดเท่ากัน

### กิจกรรมรวบยอด

3. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด ในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

### สื่อ / อุปกรณ์ / แหล่งการเรียนรู้

หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

การวัดและประเมินผล

เป้าหมาย	หลักฐาน	เครื่องมือวัด	เกณฑ์การประเมิน
<b>สาระสำคัญ</b> - มุมในส่วนโค้งของวงกลม	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ
<b>คุณลักษณะอันพึงประสงค์</b> - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน	- การเข้าเรียน และการทำงาน	- เข้าเรียน - มีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียน	- เข้าเรียนตรงเวลา - เมื่อครูถาม นักเรียนมีความกระตือรือร้นในการตอบ
<b>สมรรถนะ</b> - การแก้ปัญหา - การให้เหตุผล - ความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมาย	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ

Created by Ketum Saraburin , Nattawat Chayapao



## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ ๕

หน่วยการเรียนรู้ที่ ๓	วงกลม	เรื่อง มุมและส่วนโค้งที่รองรับมุม
วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม	ชื่อรายวิชา ค ๒๓๒๐๒	กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ ๓	ภาคเรียนที่ ๒	ปีการศึกษา ๒๕๕๘
ผู้สอน นายณัฐวัฒน์ ไชยโพธิ์		เวลา ๒ ชั่วโมง
		อาจารย์พี่เลี้ยง อาจารย์เกตุม์ สระบุรีนทร์

### ผลการเรียนรู้

นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทหรือสมบัติของวงกลมที่เกี่ยวกับมุมและส่วนโค้งที่รองรับมุม ไปใช้ได้

### สาระสำคัญ

ทฤษฎีบท ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมเดียวกันถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากัน แล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้นจะยาวเท่ากัน

### ทักษะ/กระบวนการ

- 1) การแก้ปัญหา
- 2) การให้เหตุผล
- 3) การสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ

### ด้านคุณลักษณะ

1. ใฝ่เรียนรู้
2. ทำงานเป็นระบบ รอบคอบ
3. มุ่งในการทำงาน

## กิจกรรมการเรียนรู้

### กิจกรรมนำเข้าสู่การเรียนรู้

19. ครูทบทวนเกี่ยวกับทฤษฎีบทวงกลมที่เคยเรียนมาแล้วโดยการ ถาม ตอบ

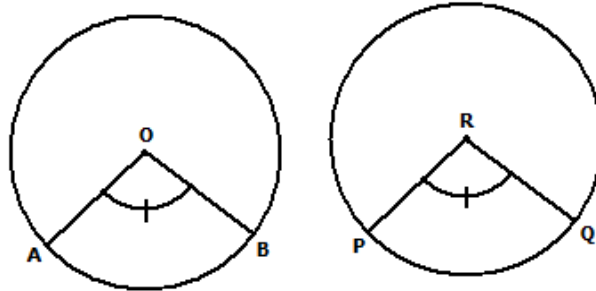
### กิจกรรมพัฒนาผู้เรียน

#### ชั่วโมงที่ 1

20. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้คือ

- a. กำหนดให้จุด  $O$  และจุด  $R$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมสองวงที่เท่ากันทุกประการและ

$$\widehat{AOB} = \widehat{PRQ} \text{ ดังรูป}$$



1.1 ให้นักเรียนใช้กระดาษลอกกลายลอกรูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง  $AOB$

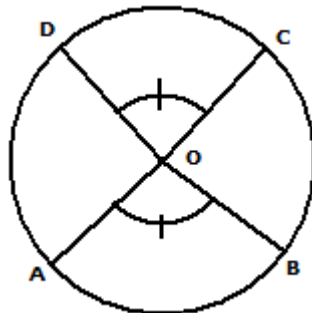
1.2 เลื่อนรูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง  $AOB$  ไปทับรูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง  $PRQ$  ให้จุด  $O$  ทับจุด  $R$  และให้  $\overline{OA}$  ทับ  $\overline{RP}$  รูปสามเหลี่ยมฐานโค้งทั้งสองจะทับกันสนิทได้หรือไม่

1.3  $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{PQ})$  หรือไม่

1.4 นักเรียนพบความสัมพันธ์ระหว่างมุมที่จุดศูนย์กลางกับส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางเป็นอย่างไร

1.5 นักเรียนคาดการณ์ว่า ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการ ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากัน แล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากันหรือไม่

2. กำหนดให้  $O$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมและ  $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$  ดังรูป



2.1 ให้นักเรียนใช้กระดาษลอกกลายลอกรูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง  $AOB$

2.2 ให้นักเรียนหมุนกระดาษลอกกลายโดยใช้จุด  $O$  เป็นจุดหมุน นักเรียนจะสามารถหมุนให้รูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง  $AOB$  ไปทับรูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง  $COD$  ได้สนิทหรือไม่

2.3  $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD})$  หรือไม่

2.4 นักเรียนพบความสัมพันธ์ระหว่างมุมที่จุดศูนย์กลางกับส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางเป็นอย่างไร

2.5 นักเรียนคาดการณ์ว่า ในวงกลมเดียวกัน ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากันแล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากันหรือไม่

3. จากกิจกรรมทั้งสองข้างต้นนักเรียนสามารถพิสูจน์ได้ว่าเป็นจริงซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบทที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ได้โดยไม่แสดงการพิสูจน์

ทฤษฎีบท ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมเดียวกันถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากันแล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้นจะยาวเท่ากัน

#### กิจกรรมรวบยอด

4. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด ในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

#### สื่อ /อุปกรณ์/ แหล่งการเรียนรู้

หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

#### การวัดและประเมินผล

เป้าหมาย	หลักฐาน	เครื่องมือวัด	เกณฑ์การประเมิน
<b>สาระสำคัญ</b> - มุมและส่วนโค้งที่รองรับมุม	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ
<b>คุณลักษณะอันพึงประสงค์</b> - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน	- การเข้าเรียน และการทำงาน	- เข้าเรียน - มีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียน	- เข้าเรียนตรงเวลา - เมื่อครูถาม นักเรียนมีความกระตือรือร้นในการตอบ
<b>สมรรถนะ</b> - การแก้ปัญหา - การให้เหตุผล - ความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมาย	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ



## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ ๖

หน่วยการเรียนรู้ที่ ๓	วงกลม	เรื่อง มุมและส่วนโค้งที่รองรับมุม
วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม	ชื่อรายวิชา ค ๒๓๒๐๒	กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ ๓	ภาคเรียนที่ ๒	ปีการศึกษา ๒๕๕๘
ผู้สอน นายณัฐวัฒน์ ไชยโพธิ์		เวลา ๑ ชั่วโมง
		อาจารย์พีเลียง อาจารย์เกตุม์ สาระบุรินทร์

### ผลการเรียนรู้

นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทหรือสมบัติของวงกลมที่เกี่ยวกับมุมและส่วนโค้งที่รองรับมุม ไปใช้ได้

### สาระสำคัญ

ทฤษฎีบท ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมเดียวกันถ้ามุมในส่วนโค้งของวงกลมมีขนาดเท่ากัน แล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน

### ทักษะ/กระบวนการ

- 1) การแก้ปัญหา
- 2) การให้เหตุผล
- 3) การสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ

### ด้านคุณลักษณะ

1. ใฝ่เรียนรู้
2. ทำงานเป็นระบบ รอบคอบ
3. มุ่งในการทำงาน



## กิจกรรมการเรียนรู้

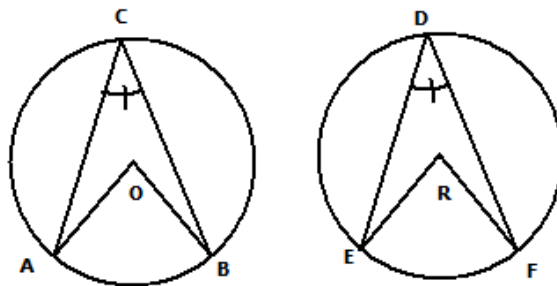
### กิจกรรมนำเข้าสู่การเรียนรู้

21. ครูทบทวนเกี่ยวกับทฤษฎีบทวงกลมที่เคยเรียนมาแล้วคือ  
ทฤษฎีบท ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมเดียวกันถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากัน  
แล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้นจะยาวเท่ากัน

### กิจกรรมพัฒนาผู้เรียน

22. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้โดยใช้ทฤษฎีบทข้างต้น ดังนี้

2.1 กำหนดให้ จุด  $O$  และ จุด  $R$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมสองวงที่เท่ากันทุก  
ประการ  $\widehat{ACB}$  และ  $\widehat{EDF}$  เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่มีขนาดเท่ากันดังรูป

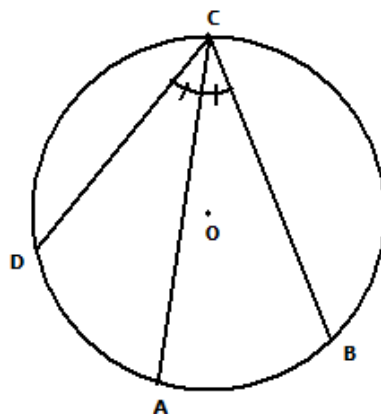


- 1) ลาก  $\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{ER}$  และ  $\overline{FR}$  นักเรียนคิดว่า  $\widehat{AOB} = \widehat{ERF}$  หรือไม่
- 2)  $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{EF})$  หรือไม่
- 3) นักเรียนพบความสัมพันธ์ระหว่างมุมในส่วนโค้งของวงกลมกับส่วนโค้งที่รองรับ

มุมนั้นเป็นอย่างไร

- 4) นักเรียนคาดการณ์ว่า ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการ ถ้ามุมในส่วนโค้งของวงกลมมีขนาดเท่ากัน แล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากันหรือไม่
- 5) ให้นักเรียนพิสูจน์ยืนยันว่าข้อความคาดการณ์ ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการ ถ้ามุมในส่วนโค้งของวงกลมมีขนาดเท่ากัน แล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน เป็นจริง

2.2 กำหนดให้จุด  $O$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม  $\widehat{ACB}$  และ  $\widehat{ACD}$  เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่มีขนาดเท่ากัน จงพิสูจน์ว่า  $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{AD})$



การพิสูจน์ที่ได้นี้เป็น การพิสูจน์ว่า ในวงกลมวงเดียวกัน ถ้ามุมในส่วนโค้งของวงกลมมีขนาดเท่ากัน แล้ว ส่วนโค้งที่รองรับมุมทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน

3. ครูให้นักเรียนสรุปการพิสูจน์ดังกล่าว ทำให้ได้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมในส่วนโค้งของวงกลมกับส่วนโค้งที่รองรับมุมนั้นที่กล่าวไว้ดังนี้

**ทฤษฎีบท** ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมเดียวกันถ้ามุมในส่วนโค้งของวงกลมมีขนาดเท่ากัน แล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน

#### กิจกรรมรวบยอด

4. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด ในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

#### สื่อ /อุปกรณ์/ แหล่งการเรียนรู้

หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

#### การวัดและประเมินผล

เป้าหมาย	หลักฐาน	เครื่องมือวัด	เกณฑ์การประเมิน
<b>สาระสำคัญ</b> - มุมและส่วนโค้งที่รองรับมุม	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ
<b>คุณลักษณะอันพึงประสงค์</b> - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน	- การเข้าเรียน และการทำงาน	- เข้าเรียน - มีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียน	- เข้าเรียนตรงเวลา - เมื่อครูถาม นักเรียนมีความกระตือรือร้นในการตอบ
<b>สมรรถนะ</b> - การแก้ปัญหา - การให้เหตุผล - ความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมาย	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ



### แผนการจัดการเรียนรู้ที่ ๗

หน่วยการเรียนรู้ที่ ๓	วงกลม	เรื่อง มุมและส่วนโค้งที่รองรับมุม
วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม	ชื่อรายวิชา ค ๒๓๒๐๒	กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ ๓	ภาคเรียนที่ ๒	ปีการศึกษา ๒๕๕๘
ผู้สอน นายณัฐวัฒน์ ไชยโพธิ์		เวลา ๑ ชั่วโมง
		อาจารย์พี่เลี้ยง อาจารย์เกตุม สระบุรีรินทร์

#### ผลการเรียนรู้

นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทหรือสมบัติของวงกลมที่เกี่ยวกับมุมและส่วนโค้งที่รองรับมุม ไปใช้ได้

#### สาระสำคัญ

ทฤษฎีบท ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมเดียวกันถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากัน แล้วมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน

#### ทักษะ/กระบวนการ

- 1) การแก้ปัญหา
- 2) การให้เหตุผล
- 3) การสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ

#### ด้านคุณลักษณะ

1. ใฝ่เรียนรู้
2. ทำงานเป็นระบบ รอบคอบ
3. มุ่งในการทำงาน

## กิจกรรมการเรียนรู้

### กิจกรรมนำเข้าสู่การเรียนรู้

23. ครูทบทวนเกี่ยวกับทฤษฎีบทวงกลมที่เคยเรียนมาแล้วโดยการถามตอบ

### กิจกรรมพัฒนาผู้เรียน

24. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

2.1 กำหนดให้ จุด  $O$  และ จุด  $R$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมสองวงที่เท่ากันทุกประการ  $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{PQ})$

1) ให้นักเรียนใช้กระดาษลอกลายลอกรูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง  $AOB$   
2) เลื่อนรูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง  $AOB$  ไปทับรูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง  $PQR$  ให้จุด  $O$  ทับกับจุด  $R$   $\overline{AO}$  ทับ  $\overline{PR}$  และให้  $AB$  ทับ  $PQ$  รูปสามเหลี่ยมฐานโค้งทั้งสองจะทับกันสนิทได้หรือไม่

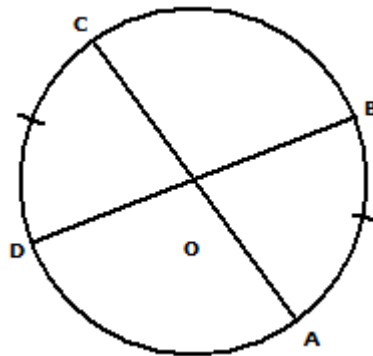
3)  $\widehat{AOB} = \widehat{PQR}$  หรือไม่

4) นักเรียนพบความสัมพันธ์ระหว่างมุมในส่วนโค้งที่รองรับมุมกับมุมที่จุด

ศูนย์กลางเป็นอย่างไร

5) นักเรียนคาดการณ์ว่า ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการ ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากัน แล้วมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากันหรือไม่

2.2 กำหนดให้จุด  $O$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และ  $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD})$  ดังรูป



1) ให้นักเรียนใช้กระดาษลอกลายลอกรูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง  $AOB$   
2) ให้นักเรียนหมุนกระดาษลอกโดยใช้จุด  $O$  เป็นจุดหมุน นักเรียนจะสามารถหมุนให้รูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง  $AOB$  ไปทับรูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง  $COD$ สนิทได้หรือไม่

3)  $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$  หรือไม่

4) นักเรียนพบความสัมพันธ์ระหว่างมุมในส่วนโค้งที่รองรับมุมกับมุมที่จุด

ศูนย์กลางเป็นอย่างไร

5) นักเรียนคาดการณ์ว่า ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการ ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากัน แล้วมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากันหรือไม่

25. จากการทำกิจกรรมข้างต้น ข้อความคาดการณ์ของนักเรียนสามารถพิสูจน์ได้ว่าเป็นจริง ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบทที่จะกล่าวถึงต่อไปโดยไม่แสดงการพิสูจน์

**ทฤษฎีบท** ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมเดียวกันถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากัน แล้วมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน

26. ครูอธิบายถึงทฤษฎีบทกลับของทฤษฎีข้างต้นได้ดังนี้

**ทฤษฎีบท** ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมเดียวกันถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากัน แล้วมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะยาวเท่ากัน

**กิจกรรมรวบยอด**

5. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 3.2ง ในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

**สื่อ /อุปกรณ์/ แหล่งการเรียนรู้**

หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

**การวัดและประเมินผล**

เป้าหมาย	หลักฐาน	เครื่องมือวัด	เกณฑ์การประเมิน
<b>สาระสำคัญ</b> - มุมและส่วนโค้งที่รองรับมุม	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ
<b>คุณลักษณะอันพึงประสงค์</b> - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน	- การเข้าเรียน และการทำงาน	- เข้าเรียน - มีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียน	- เข้าเรียนตรงเวลา - เมื่อครูถาม นักเรียนมีความกระตือรือร้นในการตอบ
<b>สมรรถนะ</b> - การแก้ปัญหา - การให้เหตุผล - ความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมาย	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ



## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ ๘

หน่วยการเรียนรู้ที่ ๓	วงกลม	เรื่อง คอร์ด
วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม	ชื่อรายวิชา ค ๒๓๒๐๒	กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ ๓	ภาคเรียนที่ ๒	ปีการศึกษา ๒๕๕๘
ผู้สอน นายณัฐวัฒน์ ไชยโพธิ์		เวลา ๑ ชั่วโมง
		อาจารย์พี่เลี้ยง อาจารย์เกตุม สระบุรีนทร์

### ผลการเรียนรู้

นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทหรือสมบัติของวงกลมที่เกี่ยวกับคอร์ดของวงกลมไปใช้ได้

### สาระสำคัญ

ทฤษฎีบท ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้าคอร์ดสองคอร์ดยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองจะตัดวงกลมทำให้ส่วนโค้งน้อยยาวเท่ากัน และส่วนโค้งใหญ่ยาวเท่ากัน

ทฤษฎีบท ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้าคอร์ดสองคอร์ดตัดวงกลมทำให้ส่วนโค้งน้อยยาวเท่ากันแล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน

### ทักษะ/กระบวนการ

- 1) การแก้ปัญหา
- 2) การให้เหตุผล
- 3) การสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ

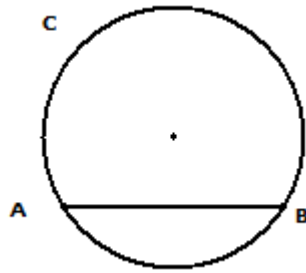
### ด้านคุณลักษณะ

1. ใฝ่เรียนรู้
2. ทำงานเป็นระบบ รอบคอบ
3. มุ่งในการทำงาน

## กิจกรรมการเรียนรู้

### กิจกรรมนำเข้าสู่การเรียนรู้

27. ครูทบทวนเกี่ยวกับคอร์ดที่เคຍทราบมาแล้วว่า คอร์ดไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลางแต่ละเส้นจะแบ่งวงกลมออกเป็นสองส่วน คือ ส่วนโค้งน้อยและส่วนโค้งใหญ่ ดังรูป  $\overline{AB}$  เป็นคอร์ด  $AB$  เป็นส่วนโค้งน้อย และ  $ACB$  เป็นส่วนโค้งใหญ่



### กิจกรรมพัฒนาผู้เรียน

28. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

2.1 กำหนดให้ จุด  $O$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม  $\overline{AB}$  และ  $\overline{CD}$  เป็นคอร์ดที่ยาวเท่ากัน ลาก  $\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{CO}$  และ  $\overline{DO}$

- 1)  $\triangle AOB \cong \triangle COD$  หรือไม่ เพราะเหตุใด
- 2)  $\hat{A}OB = \hat{C}OD$  หรือไม่ เพราะเหตุใด
- 3)  $m(AB) = m(CD)$  หรือไม่ เพราะเหตุใด
- 4)  $m(ACB) = m(CBD)$  หรือไม่ เพราะเหตุใด

5) ผลที่ได้ในกิจกรรมนี้เป็นการพิสูจน์ว่า ในวงกลมเดียวกัน ถ้าคอร์ดสองคอร์ดยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองจะตัดวงกลมทำให้ส่วนโค้งน้อยยาวเท่ากัน และส่วนโค้งใหญ่ยาวเท่ากัน หรือไม่

นักเรียนคาดการณ์ว่า ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการ ในวงกลมเดียวกัน ถ้าคอร์ดสองคอร์ดยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองจะตัดวงกลมทำให้ส่วนโค้งน้อยยาวเท่ากัน และส่วนโค้งใหญ่ยาวเท่ากัน หรือไม่

29. จากการทำกิจกรรมข้างต้น ทำให้ได้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับคอร์ดและส่วนโค้งของวงกลมที่กล่าวไว้ดังนี้

**ทฤษฎีบท** ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้าคอร์ดสองคอร์ดยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองจะตัดวงกลมทำให้ส่วนโค้งน้อยยาวเท่ากัน และส่วนโค้งใหญ่ยาวเท่ากัน

30. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

4.1 กำหนดให้ จุด  $O$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม  $\overline{AB}$  และ  $\overline{CD}$  เป็นคอร์ดที่ยาวเท่ากัน ลาก  $\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{CO}$  และ  $\overline{DO}$

- 1)  $\triangle AOB \cong \triangle COD$  หรือไม่ เพราะเหตุใด

- 2)  $\angle AOB = \angle COD$  หรือไม่ เพราะเหตุใด
- 3)  $AB = CD$  หรือไม่ เพราะเหตุใด
- 5) ผลที่ได้ในกิจกรรมนี้เป็นการพิสูจน์ว่า ในวงกลมเดียวกัน ถ้าคอร์ดสองคอร์ดตัดวงกลมทำให้ส่วนโค้งน้อยยาวเท่ากันแล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน หรือไม่
- 6) นักเรียนคาดการณ์ว่า ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการ ถ้าคอร์ดสองคอร์ดตัดวงกลมทำให้ส่วนโค้งน้อยยาวเท่ากันแล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน ด้วยหรือไม่

31. จากการทำกิจกรรมข้างต้น ทำให้ได้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับคอร์ดและส่วนโค้งของวงกลมที่กล่าวไว้ดังนี้

**ทฤษฎีบท** ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้าคอร์ดสองคอร์ดตัดวงกลมทำให้ส่วนโค้งน้อยยาวเท่ากันแล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน

#### กิจกรรมรวบยอด

6. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 3.3ก ในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

#### สื่อ /อุปกรณ์/ แหล่งการเรียนรู้

หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

#### การวัดและประเมินผล

เป้าหมาย	หลักฐาน	เครื่องมือวัด	เกณฑ์การประเมิน
สาระสำคัญ - คอร์ด	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ
คุณลักษณะอันพึงประสงค์ - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน	- การเข้าเรียน และการทำงาน	- เข้าเรียน - มีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียน	- เข้าเรียนตรงเวลา - เมื่อครูถาม นักเรียนมีความกระตือรือร้นในการตอบ
สมรรถนะ - การแก้ปัญหา - การให้เหตุผล - ความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมาย	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ





## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ ๙

หน่วยการเรียนรู้ที่ ๓	วงกลม	เรื่อง	คอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม
วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม	ชื่อรายวิชา ค ๒๓๒๐๒		กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ ๓	ภาคเรียนที่ ๒	ปีการศึกษา ๒๕๕๘	เวลา ๑ ชั่วโมง
ผู้สอน นายณัฐวัฒน์ ไชยโพธิ์		อาจารย์พี่เลี้ยง อาจารย์เกตุม สระบุรีรินทร์	

### ผลการเรียนรู้

นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทหรือสมบัติของวงกลมที่เกี่ยวกับคอร์ดและส่วนโค้งของวงกลมไปใช้ได้

### สาระสำคัญ

ทฤษฎีบท ส่วนของเส้นตรงซึ่งผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมและตัดคอร์ดที่ไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลาง จะมีสมบัติดังนี้

1. ถ้าส่วนของเส้นตรงตั้งฉากกับคอร์ด แล้วส่วนของเส้นตรงนั้นจะแบ่งครึ่งคอร์ด
2. ถ้าส่วนของเส้นตรงแบ่งครึ่งคอร์ด แล้วส่วนของเส้นตรงนั้นจะตั้งฉากกับคอร์ด

### ทักษะ/กระบวนการ

- 1) การแก้ปัญหา
- 2) การให้เหตุผล
- 3) การสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ

### ด้านคุณลักษณะ

1. ใฝ่เรียนรู้
2. ทำงานเป็นระบบ รอบคอบ
3. มุ่งในการทำงาน

## กิจกรรมการเรียนรู้

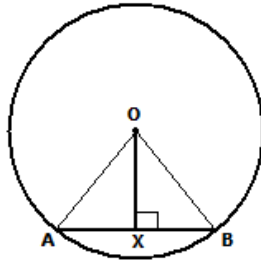
### กิจกรรมนำเข้าสู่การเรียนรู้

32. ครูทบทวนเกี่ยวกับทฤษฎีบทของวงกลมที่เคยเรียนมาแล้ว โดยการถามตอบ

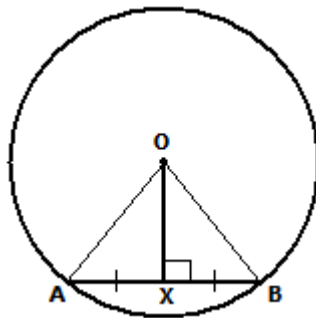
### กิจกรรมพัฒนาผู้เรียน

33. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

2.1 กำหนดให้ จุด  $O$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม  $\overline{OX}$  ตั้งฉากกับคอร์ด  $AB$  ที่จุด  $X$  จงพิสูจน์ว่า  $\overline{OX}$  แบ่งครึ่ง  $\overline{AB}$



2.2 กำหนดให้ จุด  $O$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม  $\overline{OX}$  แบ่งครึ่งคอร์ด  $AB$  ที่จุด  $X$  จงพิสูจน์ว่า  $\overline{OX}$  แบ่งครึ่ง  $\overline{AB}$



3. ครูให้นักเรียนร่วมกันพิสูจน์ข้างต้น ซึ่งเป็นการพิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับคอร์ดและจุดศูนย์กลางของวงกลมที่กล่าวไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท ส่วนของเส้นตรงซึ่งผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมและตัดคอร์ดที่ไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลาง จะมีสมบัติดังนี้

1. ถ้าส่วนของเส้นตรงตั้งฉากกับคอร์ด แล้วส่วนของเส้นตรงนั้นจะแบ่งครึ่งคอร์ด
2. ถ้าส่วนของเส้นตรงแบ่งครึ่งคอร์ด แล้วส่วนของเส้นตรงนั้นจะตั้งฉากกับคอร์ด

### กิจกรรมรวบยอด

4. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด ในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

## สื่อ / อุปกรณ์ / แหล่งการเรียนรู้

หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

การวัดและประเมินผล

เป้าหมาย	หลักฐาน	เครื่องมือวัด	เกณฑ์การประเมิน
<b>สาระสำคัญ</b> - คอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ
<b>คุณลักษณะอันพึงประสงค์</b> - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน	- การเข้าเรียน และการทำงาน	- เข้าเรียน - มีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียน	- เข้าเรียนตรงเวลา - เมื่อครูถาม นักเรียนมีความกระตือรือร้นในการตอบ
<b>สมรรถนะ</b> - การแก้ปัญหา - การให้เหตุผล - ความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมาย	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ

Created by Ketum Saraburin , Nattawat Chaiyapoo



### แผนการจัดการเรียนรู้ที่ ๑๐

หน่วยการเรียนรู้ที่ ๓	วงกลม	เรื่อง	คอร์ตกับจุดศูนย์กลางของวงกลม
วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม	ชื่อรายวิชา ค ๒๓๒๐๒		กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ ๓	ภาคเรียนที่ ๒	ปีการศึกษา ๒๕๕๘	เวลา ๑ ชั่วโมง
ผู้สอน นายณัฐวัฒน์ ไชยโพธิ์		อาจารย์พีเลียง อาจารย์เกตุม สระบุรินทร์	

#### ผลการเรียนรู้

นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทหรือสมบัติของวงกลมที่เกี่ยวกับคอร์ตและส่วนโค้งของวงกลมไปใช้ได้

#### สาระสำคัญ

ทฤษฎีบท เส้นตรงที่ตั้งฉากและแบ่งครึ่งคอร์ตของวงกลมจะผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมนั้น

#### ทักษะ/กระบวนการ

- 1) การแก้ปัญหา
- 2) การให้เหตุผล
- 3) การสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ

#### ด้านคุณลักษณะ

1. ใฝ่เรียนรู้
2. ทำงานเป็นระบบ รอบคอบ
3. มุ่งในการทำงาน

## กิจกรรมการเรียนรู้

### กิจกรรมนำเข้าสู่การเรียนรู้

34. ครูทบทวนเกี่ยวกับทฤษฎีบทของวงกลมที่ว่า จุดใดๆที่อยู่บนเส้นตั้งฉากและแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรง จะอยู่ห่างจากจุดปลายทั้งสองของส่วนของเส้นตรงนั้นเป็นระยะเท่ากัน

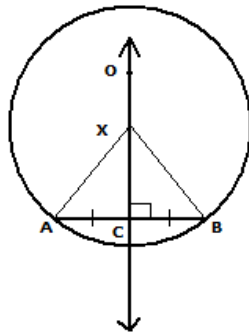
### กิจกรรมพัฒนาผู้เรียน

35. ครูอธิบายว่าทฤษฎีบทที่กล่าวไว้ข้างต้นมาช่วยในการพิสูจน์ว่า เส้นตรงที่ตั้งฉากและแบ่งครึ่งคอร์ดของวงกลม จะผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมนั้น

36. ครูให้นักเรียนพิจารณาการพิสูจน์ต่อไปนี้

กำหนดให้ จุด  $O$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่มี  $\overline{AB}$  เป็นคอร์ดเส้นตรง  $l$  ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง  $\overline{AB}$  ที่จุด  $C$

ต้องการพิสูจน์ว่า เส้นตรง  $l$  ผ่านจุด  $O$



### สร้างเพื่อการพิสูจน์

1. ใช้จุด  $A$  และจุด  $B$  เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมียาวพอสมควร เขียนส่วนโค้งตัดกันที่จุด  $X$  จะได้จุด  $X$  เป็นจุดใดๆ ที่  $AX = BX$

2. ลาก  $\overline{XC}$

### พิสูจน์

พิจารณา  $\triangle AXC$  และ  $\triangle BXC$

ข้อความ	พิสูจน์
1. เนื่องจาก $AC = BC$	1. กำหนดให้จุด $C$ เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$
2. $AX = BX$	2. การสร้าง
3. $XC = XC$	3. ด้านร่วม
4. ดังนั้น $\triangle AXC \cong \triangle BXC$	4. ด.ด.ด
5. ดังนั้น $\hat{A}CX = \hat{B}CX$	5. มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน
6. $\hat{A}CX + \hat{B}CX = 180^\circ$	6. มุมตรง
7. $2(\hat{A}CX) = 180^\circ$	7. แทน $\hat{B}CX$ ด้วย $\hat{A}CX$
8. $\hat{A}CX = 90^\circ$	8. สมบัติการเท่ากัน
9. $\overline{XC} \perp \overline{AB}$ ที่จุด $C$ เส้นตรง $l$ ตั้งฉาก	9. กำหนดให้

<p>กับ <math>\overline{AB}</math> ที่จุด <math>C</math></p> <p>10. จุด <math>X</math> อยู่บนเส้นตรง <math>l</math></p> <p>11. จุด <math>X</math> เป็นจุดใดๆที่อยู่ห่างจุด <math>A</math> และจุด <math>B</math> เท่ากันและอยู่บนเส้นตรง <math>l</math></p> <p>12. จุด <math>O</math> ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม จึงต้องอยู่บนเส้นตรง <math>l</math> ด้วย</p> <p>13. เส้นตรง <math>l</math> ผ่านจุด <math>O</math></p>	<p>10. กำหนดให้</p> <p>11. มีเส้นตรงเพียงเส้นเดียวเท่านั้นที่ตั้งฉากกับเส้นตรงที่กำหนดให้ ณ จุดที่กำหนด</p> <p>12. จากการสร้าง</p> <p>13. จุด <math>O</math> อยู่ห่างจากจุด <math>A</math> และจุด <math>B</math> เท่ากัน</p>
--	--

3. จากการพิสูจน์ข้างต้นครูให้นักเรียนร่วมกันสรุป ทำให้ได้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับเส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมดังนี้

**ทฤษฎีบท** เส้นตรงที่ตั้งฉากและแบ่งครึ่งคอร์ดของวงกลมจะผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมนั้น  
**กิจกรรมรวบยอด**

4. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด ในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

### สื่อ /อุปกรณ์/ แหล่งการเรียนรู้

หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

### การวัดและประเมินผล

เป้าหมาย	หลักฐาน	เครื่องมือวัด	เกณฑ์การประเมิน
<b>สาระสำคัญ</b> - เส้นตรงที่ตั้งฉากและแบ่งครึ่งคอร์ดของวงกลมจะผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมนั้น	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ
<b>คุณลักษณะอันพึงประสงค์</b> - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน	- การเข้าเรียน และการทำงาน	- เข้าเรียน - มีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียน	- เข้าเรียนตรงเวลา - เมื่อครูถาม นักเรียนมีความกระตือรือร้นในการตอบ
<b>สมรรถนะ</b> - การแก้ปัญหา - การให้เหตุผล - ความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมาย	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ



### แผนการจัดการเรียนรู้ที่ ๑๑

หน่วยการเรียนรู้ที่ ๓	วงกลม	เรื่อง รูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม
วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม	ชื่อรายวิชา ค ๒๓๒๐๒	กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ ๓	ภาคเรียนที่ ๒	ปีการศึกษา ๒๕๕๘
ผู้สอน นายณัฐวัฒน์ ไชยโพธิ์		เวลา ๑ ชั่วโมง
		อาจารย์พี่เลี้ยง อาจารย์เกตุม สระบุรีรินทร์

#### ผลการเรียนรู้

นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทหรือสมบัติของวงกลมที่เกี่ยวกับคอร์ดและส่วนโค้งของวงกลมไปใช้ได้

#### สาระสำคัญ

ทฤษฎีบท ถ้ารูปสี่เหลี่ยมใดๆ มีผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามเท่ากับสองมุมฉาก แล้วรูปสี่เหลี่ยมนั้นแนบในวงกลมได้

#### ทักษะ/กระบวนการ

- 1) การแก้ปัญหา
- 2) การให้เหตุผล
- 3) การสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ

#### ด้านคุณลักษณะ

1. ใฝ่เรียนรู้
2. ทำงานเป็นระบบ รอบคอบ
3. มุ่งในการทำงาน

## กิจกรรมการเรียนรู้

### กิจกรรมนำเข้าสู่การเรียนรู้

37. ครูทบทวนเกี่ยวกับทฤษฎีบทของวงกลมที่ว่า มีวงกลมเพียงวงเดียวเท่านั้นที่ผ่านจุดสามจุดซึ่งไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

### กิจกรรมพัฒนาผู้เรียน

38. ครูอธิบายว่าทฤษฎีบทที่กล่าวไว้ข้างต้นมาช่วยให้เหตุผลว่า ถ้ารูปสี่เหลี่ยมใดๆมีผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามเท่ากับสองมุมฉาก แล้วรูปสี่เหลี่ยมนั้นแนบในวงกลมวงหนึ่งได้

39. ครูให้นักเรียนพิจารณาการพิสูจน์ต่อไปนี้

กำหนดให้  $\square ABCD$  มี  $\hat{A}BC + \hat{A}DC = 180^\circ$

ต้องการพิสูจน์ว่า  $\square ABCD$  แนบในวงกลมได้

แนวคิด สมมติว่า  $\square ABCD$  แนบในวงกลมไม่ได้ โดยสมบัติของวงกลมที่กล่าวมาแล้ว เราสามารถสร้างวงกลมผ่านจุดสามจุดที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกันได้เสมอ

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

- 1)  $\hat{A}BC + \hat{A}DC$  เท่ากับกึ่งองศา เพราะเหตุใด
- 2)  $\hat{B}AD + \hat{B}CD$  เท่ากับกึ่งองศา เพราะเหตุใด
- 3)  $\hat{B}AD + \hat{B}ED$  เท่ากับกึ่งองศา เพราะเหตุใด
- 4)  $\hat{B}AD + \hat{B}CD = \hat{B}AD + \hat{B}ED$  หรือไม่ เพราะเหตุใด
- 5) จากข้อ 4 จะได้  $\hat{B}CD = \hat{B}ED$  หรือไม่ เพราะเหตุใด

โดยสมบัติของขนาดของมุมภายนอกและขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมใดๆจะได้ว่า สำหรับ  $\triangle CDE$  มี  $\hat{B}CD = \hat{B}CD + \hat{E}DC$  ดังนั้น  $\hat{B}ED > \hat{B}CD$

จะเห็นว่าผลที่ได้ขัดแย้งกับคำตอบในข้อ 5 ของนักเรียน ดังนั้น ที่สมมติว่า  $\square ABCD$  แนบในวงกลมไม่ได้นั้นเป็นไปได้

นั่นคือ ถ้า  $\square ABCD$  มี  $\hat{A}BC + \hat{A}DC = 180^\circ$  แล้ว  $\square ABCD$  แนบในวงกลมได้

40. จากการพิสูจน์ข้างต้นครูให้นักเรียนร่วมกันสรุป ทำให้ได้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลมดังนี้  
ทฤษฎีบท ถ้ารูปสี่เหลี่ยมใดๆ มีผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามเท่ากับสองมุมฉาก แล้วรูปสี่เหลี่ยมนั้นแนบในวงกลมได้

### กิจกรรมรวบยอด

5. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 3.3ข ในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

## สื่อ / อุปกรณ์ / แหล่งการเรียนรู้

หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2



การวัดและประเมินผล

เป้าหมาย	หลักฐาน	เครื่องมือวัด	เกณฑ์การประเมิน
<b>สาระสำคัญ</b> - รูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ
<b>คุณลักษณะอันพึงประสงค์</b> - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน	- การเข้าเรียน และการทำงาน	- เข้าเรียน - มีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียน	- เข้าเรียนตรงเวลา - เมื่อครูถาม นักเรียนมีความกระตือรือร้นในการตอบ
<b>สมรรถนะ</b> - การแก้ปัญหา - การให้เหตุผล - ความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมาย	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ

Created by Ketum Saraburin , Nattawat Chaiyapoo



## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ ๑๒

หน่วยการเรียนรู้ที่ ๓	วงกลม	เรื่อง	คอร์ดที่ยาวเท่ากัน
วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม	ชื่อรายวิชา ค ๒๓๒๐๒	กลุ่มสาระการเรียนรู้	คณิตศาสตร์
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ ๓	ภาคเรียนที่ ๒	ปีการศึกษา ๒๕๕๘	เวลา ๑ ชั่วโมง
ผู้สอน นายณัฐวัฒน์ ไชยโพธิ์		อาจารย์พีเลียง อาจารย์เกตุม สระบุรีนทร์	

### ผลการเรียนรู้

นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทหรือสมบัติของวงกลมที่เกี่ยวกับคอร์ดและส่วนโค้งของวงกลมไปใช้ได้

### สาระสำคัญ

- ทฤษฎีบท
1. ในวงกลมเดียวกัน ถ้าคอร์ดสองเส้นยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน
  2. ในวงกลมเดียวกัน ถ้าคอร์ดสองเส้นอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน

### ทักษะ/กระบวนการ

- 1) การแก้ปัญหา
- 2) การให้เหตุผล
- 3) การสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ

### ด้านคุณลักษณะ

1. ใฝ่เรียนรู้
2. ทำงานเป็นระบบ รอบคอบ
3. มุ่งในการทำงาน

## กิจกรรมการเรียนรู้

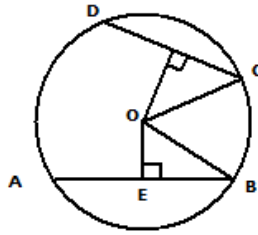
### กิจกรรมนำเข้าสู่การเรียนรู้

1. ครูทบทวนเกี่ยวกับทฤษฎีบทของวงกลมที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้วโดยการถามตอบ

### กิจกรรมพัฒนาผู้เรียน

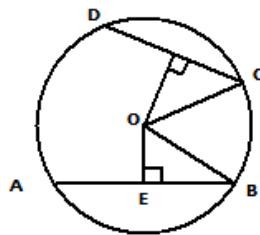
2. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้พร้อมตอบคำถาม

2.1 กำหนดให้ จุด  $O$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม  $\overline{AB}$  และ  $\overline{CD}$  เป็นคอร์ดที่ยาวเท่ากัน  $\overline{OE} \perp \overline{AB}$  ที่จุด  $E$  และ  $\overline{OF} \perp \overline{CD}$  ที่จุด  $F$  ลาก  $\overline{OB}$  และ  $\overline{OC}$



- 1)  $AE = BE$  และ  $DF = CF$  หรือไม่ เพราะเหตุใด
- 2)  $BE = \frac{AB}{2}$  และ  $CF = \frac{CD}{2}$  หรือไม่
- 3)  $BE = CF$  หรือไม่ เพราะเหตุใด
- 4)  $\triangle OEB \cong \triangle OFC$  หรือไม่ เพราะเหตุใด
- 5)  $OE = OF$  หรือไม่ เพราะเหตุใด
- 6) คอร์ด  $AB$  และคอร์ด  $CD$  อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางเท่ากันหรือไม่
- 7) นักเรียนคิดว่า ในวงกลมใดๆคอร์ดที่ยาวเท่ากัน จะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเท่ากันหรือไม่

2.2 กำหนดให้ จุด  $O$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม  $\overline{AB}$  และ  $\overline{CD}$  เป็นคอร์ด  $\overline{OE} \perp \overline{AB}$  ที่จุด  $E$  และ  $\overline{OF} \perp \overline{CD}$  ที่จุด  $F$  และให้  $OE = OF$  ลาก  $\overline{OB}$  และ  $\overline{OC}$



- 1)  $\triangle OEB \cong \triangle OFC$  หรือไม่ เพราะเหตุใด
- 2)  $BE = CF$  หรือไม่ เพราะเหตุใด
- 3)  $2(BE) = 2(CF)$  หรือไม่ เพราะเหตุใด
- 4)  $2(BE) = AB$  หรือไม่ เพราะเหตุใด
- 5)  $2(CF) = CD$  หรือไม่ เพราะเหตุใด
- 6)  $AB = CD$  หรือไม่ เพราะเหตุใด

- 7) นักเรียนคิดว่า ในวงกลมใดๆที่คอร์ดอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเท่ากัน จะยาวเท่ากัน หรือไม่
3. จากการตอบคำถามข้างต้นครูให้นักเรียนร่วมกันสรุป ทำให้ได้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับวงกลมดังนี้

- ทฤษฎีบท**
1. ในวงกลมเดียวกัน ถ้าคอร์ดสองเส้นยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน
  2. ในวงกลมเดียวกัน ถ้าคอร์ดสองเส้นอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน

#### กิจกรรมรวบยอด

4. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 3.3ค ในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

#### สื่อ /อุปกรณ์/ แหล่งการเรียนรู้

หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

#### การวัดและประเมินผล

เป้าหมาย	หลักฐาน	เครื่องมือวัด	เกณฑ์การประเมิน
<b>สาระสำคัญ</b> - คอร์ดที่ยาวเท่ากัน	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ
<b>คุณลักษณะอันพึงประสงค์</b> - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน	- การเข้าเรียน และการทำงาน	- เข้าเรียน - มีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียน	- เข้าเรียนตรงเวลา - เมื่อครูถาม นักเรียนมีความกระตือรือร้นในการตอบ
<b>สมรรถนะ</b> - การแก้ปัญหา - การให้เหตุผล - ความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมาย	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ



### แผนการจัดการเรียนรู้ที่ ๑๓

หน่วยการเรียนรู้ที่ ๓	วงกลม	เรื่อง เส้นสัมผัสวงกลม
วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม	ชื่อรายวิชา ค ๒๓๒๐๒	กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ ๓	ภาคเรียนที่ ๒	ปีการศึกษา ๒๕๕๘
ผู้สอน นายณัฐวัฒน์ ไชยโพธิ์		เวลา ๑ ชั่วโมง
		อาจารย์พี่เลี้ยง อาจารย์เกตุม สระบุรีรินทร์

#### ผลการเรียนรู้

นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทหรือสมบัติของวงกลมที่เกี่ยวกับเส้นสัมผัสวงกลมไปใช้ได้สาระสำคัญ  
ทฤษฎีบท เส้นสัมผัสวงกลม จะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส  
ทฤษฎีบท เส้นตรงที่ตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดจุดหนึ่งบนวงกลม จะเป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่  
จุดนั้น

#### ทักษะ/กระบวนการ

- 1) การแก้ปัญหา
- 2) การให้เหตุผล
- 3) การสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ

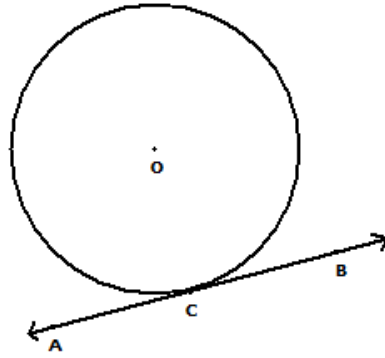
#### ด้านคุณลักษณะ

1. ใฝ่เรียนรู้
2. ทำงานเป็นระบบ รอบคอบ
3. มุ่งในการทำงาน

## กิจกรรมการเรียนรู้

### กิจกรรมนำเข้าสู่การเรียนรู้

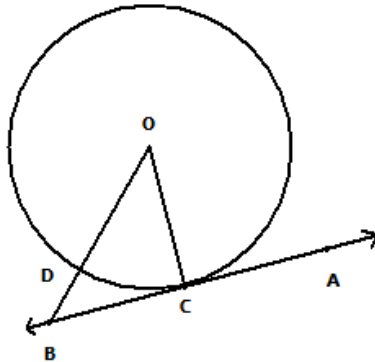
1. ครูทบทวนเกี่ยวกับ เส้นสัมผัสวงกลมหรือเส้นตรงที่ตัดวงกลมเพียงจุดเดียวเท่านั้นและเรียนจุดตัดว่า จุดสัมผัส ดังรูป  $\overline{AB}$  เป็นเส้นสัมผัสวงกลม  $O$  และจุด  $C$  เป็นจุดสัมผัส อาจกล่าวว่า ส่วนหนึ่งของ  $\overline{AB}$  ที่ผ่านจุด  $C$  เช่น  $\overline{AC}, \overline{AB}, \overline{AC}$  หรือ  $\overline{BC}$  สัมผัส วงกลม  $O$  ที่จุด  $C$



### กิจกรรมพัฒนาผู้เรียน

2. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้พร้อมตอบคำถาม

2.1 กำหนดให้ จุด  $O$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมลาก  $\overline{PQ}$  และ  $\overline{XY}$  สัมผัสวงกลม ที่จุด  $A$  และ  $B$  ตามลำดับ



- 1) ลาก  $\overline{OA}$  และ  $\overline{OB}$  จะได้  $\overline{OA}$  และ  $\overline{OB}$  เป็นรัศมีของวงกลมหรือไม่
- 2) ให้นักเรียนวัดขนาดของ  $\hat{OAP}$  และขนาดของ  $\hat{OBX}$
- 3) เส้นสัมผัส  $\overline{PQ}$  และเส้นสัมผัส  $\overline{XY}$  ตั้งฉากกับ  $\overline{OA}$  และ  $\overline{OB}$  ตามลำดับหรือไม่
- 4) ถ้าจุด  $C$  เป็นจุดจุดหนึ่งของวงกลม  $O$  แล้วเส้นสัมผัสวงกลม  $O$  ที่จุด  $C$  จะตั้งฉากกับ  $\overline{OC}$  หรือไม่
- 5) นักเรียนคาดการณ์ว่า เส้นสัมผัสวงกลม จะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัสหรือไม่

3. ครูให้นักเรียนพิจารณาการพิสูจน์ต่อไปนี้ โดยให้นักเรียนร่วมกันพิสูจน์

กำหนดให้ จุด จุด  $O$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม  $\overline{AC}$  สัมผัสวงกลมที่จุด  $C$

ต้องการพิสูจน์ว่า  $\overline{OC} \perp \overline{AC}$

4. จากการพิสูจน์ข้างต้นครูให้นักเรียนร่วมกันสรุป ทำให้ได้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับเส้นสัมผัสและจุดสัมผัสของวงกลมดังนี้

ทฤษฎีบท เส้นสัมผัสวงกลม จะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส

ครูอธิบายถึงบทกลับของทฤษฎีบทที่กล่าวไว้ว่า เส้นสัมผัสวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส ซึ่งเป็นบทกลับดังกล่าวเป็นทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบท เส้นตรงที่ตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดจุดหนึ่งบนวงกลม จะเป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่จุดนั้น

#### กิจกรรมรวบยอด

6. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 3.4ก ในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

#### สื่อ /อุปกรณ์/ แหล่งการเรียนรู้

หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

#### การวัดและประเมินผล

เป้าหมาย	หลักฐาน	เครื่องมือวัด	เกณฑ์การประเมิน
สาระสำคัญ - เส้นสัมผัสวงกลม	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ
คุณลักษณะอันพึงประสงค์ - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน	- การเข้าเรียน และการทำงาน	- เข้าเรียน - มีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียน	- เข้าเรียนตรงเวลา - เมื่อครูถาม นักเรียนมีความกระตือรือร้นในการตอบ
สมรรถนะ - การแก้ปัญหา - การให้เหตุผล - ความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมาย	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ



### แผนการจัดการเรียนรู้ที่ ๑๔

หน่วยการเรียนรู้ที่ ๓	วงกลม	เรื่อง	เส้นสัมผัสและคอร์ด
วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม	ชื่อรายวิชา ค ๒๓๒๐๒	กลุ่มสาระการเรียนรู้	คณิตศาสตร์
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ ๓	ภาคเรียนที่ ๒	ปีการศึกษา ๒๕๕๘	เวลา ๑ ชั่วโมง
ผู้สอน นายณัฐวัฒน์ ไชยโพธิ์		อาจารย์พีเลียง อาจารย์เกตุม	สระบุรีรินทร์

#### ผลการเรียนรู้

นักเรียนสามารถนำทฤษฎีบทหรือสมบัติของวงกลมที่เกี่ยวกับเส้นสัมผัสวงกลมไปใช้ได้สาระสำคัญ  
ทฤษฎีบท มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสของวงกลมที่จุดสัมผัสจะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุม  
ในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น

#### ทักษะ/กระบวนการ

- 1) การแก้ปัญหา
- 2) การให้เหตุผล
- 3) การสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ

#### ด้านคุณลักษณะ

1. ใฝ่เรียนรู้
2. ทำงานเป็นระบบ รอบคอบ
3. มุ่งในการทำงาน



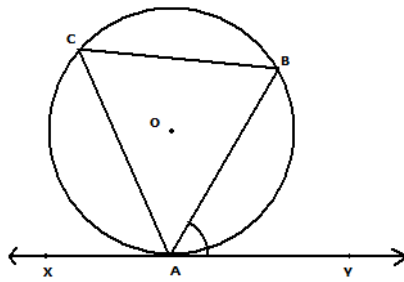
## กิจกรรมการเรียนรู้

### กิจกรรมนำเข้าสู่การเรียนรู้

1. ครูทบทวนเกี่ยวกับทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับ เส้นสัมผัสวงกลมและคอร์ด โดยการถามตอบ

### กิจกรรมพัฒนาผู้เรียน

2. ครูอธิบายให้นักเรียนว่า กำหนดให้จุด  $O$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม  $\overline{XY}$  สัมผัสวงกลม  $O$  ที่จุด  $A$   $\overline{AB}$  เป็นคอร์ด และ  $\widehat{ACB}$  เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลม

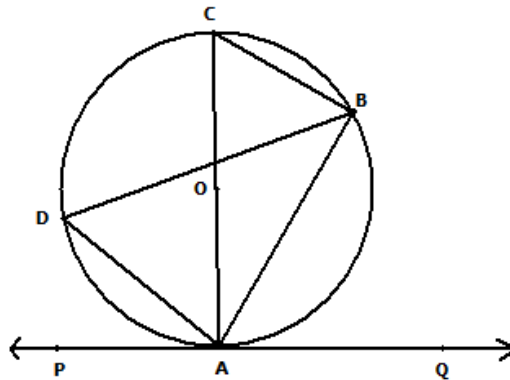


จากรูป เรียก  $\widehat{BAY}$  ว่า มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสที่จุดสัมผัส  $A$

เรียก  $\widehat{ACB}$  ว่า มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ด  $AB$

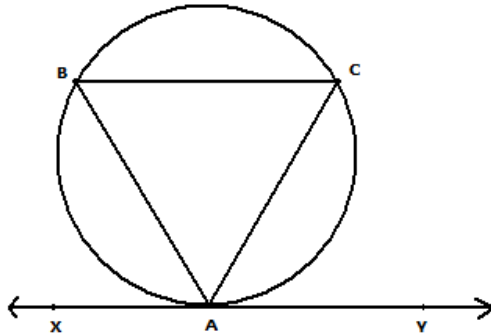
3. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้พร้อมตอบคำถาม

3.1 จากรูป จุด  $O$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม  $\overline{AC}$  เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง  $\overline{AB}$  เป็นคอร์ด  $\overline{PQ}$  สัมผัสวงกลมที่จุด  $A$   $\widehat{ACB}$  และ  $\widehat{ADB}$  เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ด  $AB$



- 1)  $\widehat{ABC}$  มีขนาดกี่องศา
- 2)  $\widehat{ACB} + \widehat{CAB}$  มีขนาดกี่องศา
- 3)  $\widehat{CAB} + \widehat{BAQ}$  มีขนาดกี่องศา
- 4)  $\widehat{ACB} + \widehat{CAB}$  เท่ากับ  $\widehat{CAB} + \widehat{BAQ}$  หรือไม่
- 5)  $\widehat{ACB} = \widehat{BAQ}$  หรือไม่ เพราะเหตุใด
- 6)  $\widehat{ADB} = \widehat{BAQ}$  หรือไม่ เพราะเหตุใด

- 4, ครูให้นักเรียนพิจารณาการพิสูจน์ต่อไปนี้ โดยให้นักเรียนร่วมกันพิสูจน์  
จากรูป คอร์ด  $AB$  และคอร์ด  $AC$  ทำมุมกับเส้นสัมผัส  $XY$  ที่จุด  $A$



จงพิสูจน์ว่า  $\hat{BAX} = \hat{ACB}$  และ  $\hat{CAY} = \hat{ABC}$

41. จากการพิสูจน์ข้างต้นครูให้นักเรียนร่วมกันสรุป ทำให้ได้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างเส้นสัมผัสกับคอร์ดของวงกลมดังนี้

ทฤษฎีบท มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสของวงกลมที่จุดสัมผัสจะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น

กิจกรรมรวบยอด

6. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 3.4ข ในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

สื่อ / อุปกรณ์/ แหล่งการเรียนรู้

หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

การวัดและประเมินผล

เป้าหมาย	หลักฐาน	เครื่องมือวัด	เกณฑ์การประเมิน
สาระสำคัญ - เส้นสัมผัสและคอร์ด	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ
คุณลักษณะอันพึงประสงค์ - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน	- การเข้าเรียน และการทำงาน	- เข้าเรียน - มีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียน	- เข้าเรียนตรงเวลา - เมื่อครูถาม นักเรียนมีความกระตือรือร้นในการตอบ
สมรรถนะ - การแก้ปัญหา - การให้เหตุผล - ความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมาย	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ



## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ ๑

หน่วยการเรียนรู้ที่ ๔      เศษส่วนของพหุนาม      เรื่อง      การดำเนินการของเศษส่วนของพหุนาม  
วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม      ชื่อรายวิชา ค ๒๓๒๐๒      กลุ่มสาระการเรียนรู้      คณิตศาสตร์  
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ ๓      ภาคเรียนที่ ๒      ปีการศึกษา ๒๕๕๘      เวลา ๒ ชั่วโมง  
ผู้สอน      นายณัฐวัฒน์ ไชยโพธิ์      อาจารย์พีเลียง      อาจารย์เกตุม      สาระบุรินทร์

---

### ผลการเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถคูณและหารเศษส่วนของพหุนามและเขียนผลลัพธ์เป็นเศษส่วนของพหุนามในรูปผลสำเร็จได้

### สาระสำคัญ

การคูณและการหารเศษส่วนของพหุนาม มีหลักเกณฑ์ดังนี้

1. เมื่อมี  $P, Q, R$  และ  $S$  เป็นพหุนาม โดยที่  $Q \neq 0$  และ  $S \neq 0$  จะได้ว่า

$$\frac{P}{Q} \times \frac{R}{S} = \frac{P \times R}{Q \times S}$$

2. เมื่อมี  $P, Q, R$  และ  $S$  เป็นพหุนาม โดยที่  $Q \neq 0$ ,  $R \neq 0$  และ  $S \neq 0$  จะได้ว่า

$$\frac{P}{Q} \div \frac{R}{S} = \frac{P}{Q} \times \frac{S}{R}$$

นิยมเขียนผลคูณและผลหารที่ได้ให้เป็นเศษส่วนของพหุนามในรูปผลสำเร็จ

### ทักษะ/กระบวนการ

- 1) การแก้ปัญหา
- 2) การให้เหตุผล
- 3) การสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ

### ด้านคุณลักษณะ

1. ใฝ่เรียนรู้
2. ทำงานเป็นระบบ รอบคอบ
3. มุ่งในการทำงาน

## กิจกรรมการเรียนรู้

### กิจกรรมนำเข้าสู่การเรียนรู้

1. ครูทบทวนเกี่ยวกับหลักเกณฑ์การคูณและการหารเศษส่วนพหุนาม เช่นเดียวกับการคูณและการหารเศษส่วนดังนี้

เมื่อมี  $P, Q, R$  และ  $S$  เป็นพหุนาม โดยที่  $Q \neq 0$  และ  $S \neq 0$  จะได้ว่า

$$\frac{P}{Q} \times \frac{R}{S} = \frac{P \times R}{Q \times S}$$

เมื่อมี  $P, Q, R$  และ  $S$  เป็นพหุนาม โดยที่  $Q \neq 0$ ,  $R \neq 0$  และ  $S \neq 0$  จะได้ว่า

$$\frac{P}{Q} \div \frac{R}{S} = \frac{P}{Q} \times \frac{S}{R}$$

### กิจกรรมพัฒนาผู้เรียน

2. ครูอธิบายโดยยกตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1. จงหาผลคูณของ  $\frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 16}$  กับ  $\frac{x + 4}{x - 5}$

วิธีทำ 
$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 16} \times \frac{x + 4}{x - 5} &= \frac{(x^2 - 7x + 10)(x + 4)}{(x^2 - 16)(x - 5)} \\ &= \frac{(x - 2)(x - 5)(x + 4)}{(x + 4)(x - 4)(x - 5)} \\ &= \frac{x - 2}{x - 4} \end{aligned}$$

ตอบ  $\frac{x - 2}{x - 4}$

ตัวอย่าง 2. จงหาผลคูณของ  $\frac{9y^2 - 24y + 16}{2y + 5}$  กับ  $\frac{8y^2 + 14y - 15}{-3y^2 - 5y + 12}$

วิธีทำ 
$$\begin{aligned} \frac{9y^2 - 24y + 16}{2y + 5} \times \frac{8y^2 + 14y - 15}{-3y^2 - 5y + 12} &= \frac{(9y^2 - 24y + 16)(8y^2 + 14y - 15)}{(2y + 5)(-3y^2 - 5y + 12)} \\ &= \frac{(3y - 4)^2(2y + 5)(4y - 3)}{(2y + 5)(-1)(3y^2 + 5y - 12)} \\ &= \frac{(3y - 4)^2(2y + 5)(4y - 3)}{(2y + 5)(-1)(3y - 4)(y + 3)} \\ &= \frac{(3y - 4)(4y - 3)}{(-1)(y + 3)} \\ &= \frac{(3y - 4)(4y - 3)}{-y - 3} \quad \text{หรือ} \\ &= \frac{12y^2 - 25y + 12}{-y - 3} \end{aligned}$$

ตอบ  $\frac{(3y - 4)(4y - 3)}{-y - 3}$  หรือ  $\frac{12y^2 - 25y + 12}{-y - 3}$

ตัวอย่าง 3. จงหาร  $\frac{x^2-5x+6}{x^2+4x-12}$  ด้วย  $\frac{x^3-27}{x+6}$

วิธีทำ 
$$\begin{aligned}\frac{x^2-5x+6}{x^2+4x-12} \div \frac{x^3-27}{x+6} &= \frac{x^2-5x+6}{x^2+4x-12} \times \frac{x+6}{x^3-27} \\ &= \frac{(x-2)(x-3)}{(x+6)(x-2)} \times \frac{x+6}{(x-3)(x^2+3x+9)} \\ &= \frac{1}{x^2+3x+9}\end{aligned}$$

ตอบ  $\frac{1}{x^2+3x+9}$

ตัวอย่าง 4. จงหาร  $\frac{y^3-36y}{12y^2+2y-30}$  ด้วย  $\frac{4y^2-24y}{2y-3}$

วิธีทำ 
$$\begin{aligned}\frac{y^3-36y}{12y^2+2y-30} \div \frac{4y^2-24y}{2y-3} &= \frac{y^3-36y}{12y^2+2y-30} \times \frac{2y-3}{4y^2-24y} \\ &= \frac{(y^3-36y)(2y-3)}{(12y^2+2y-30)(4y^2-24y)} \\ &= \frac{y(y^2-36)(2y-3)}{2(6y^2+y-15)4y(y-6)} \\ &= \frac{y(y-6)(y+6)(2y-3)}{2(2y-3)(3y+5)4y(y-6)} \\ &= \frac{y+6}{8(3y+5)} \text{ หรือ } \frac{y+6}{24y+40}\end{aligned}$$

ตอบ  $\frac{y+6}{8(3y+5)}$  หรือ  $\frac{y+6}{24y+40}$

### กิจกรรมรวบยอด

5. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 4.1ก ในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

สื่อ / อุปกรณ์ / แหล่งการเรียนรู้

หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

การวัดและประเมินผล

เป้าหมาย	หลักฐาน	เครื่องมือวัด	เกณฑ์การประเมิน
<b>สาระสำคัญ</b> - การคูณและการหาร เศษส่วนของพหุนาม	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ
<b>คุณลักษณะอันพึงประสงค์</b> - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน	- การเข้าเรียน และการทำงาน	- เข้าเรียน - มีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียน	- เข้าเรียนตรงเวลา - เมื่อครูถาม นักเรียนมีความกระตือรือร้นในการตอบ
<b>สมรรถนะ</b> - การแก้ปัญหา - การให้เหตุผล - ความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมาย	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ

Created by Ketum Saraburin , Nattawat Chaiyapoo



## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ ๒

หน่วยการเรียนรู้ที่ ๔      เศษส่วนของพหุนาม      เรื่อง      การดำเนินการของเศษส่วนของพหุนาม  
วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม      ชื่อรายวิชา ค ๒๓๒๐๒      กลุ่มสาระการเรียนรู้      คณิตศาสตร์  
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ ๓      ภาคเรียนที่ ๒      ปีการศึกษา ๒๕๕๘      เวลา ๒ ชั่วโมง  
ผู้สอน      นายณัฐวัฒน์ ไชยโพธิ์      อาจารย์พีเลียง อาจารย์เกตุม      สาระบูรินทร์

---

### ผลการเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถบวกและลบเศษส่วนของพหุนามและเขียนผลลัพธ์เป็นเศษส่วนของพหุนามในรูปผลสำเร็จได้

### สาระสำคัญ

การบวกและการลบเศษส่วนของพหุนาม มีหลักเกณฑ์ดังนี้

3. เมื่อมี  $P, Q$  และ  $R$  เป็นพหุนาม โดยที่  $Q \neq 0$  จะได้ว่า

$$\frac{P}{Q} + \frac{R}{Q} = \frac{P+R}{Q}$$
$$\text{และ } \frac{P}{Q} - \frac{R}{Q} = \frac{P-R}{Q}$$

นิยมเขียนผลบวกและผลลบที่ได้ให้เป็นเศษส่วนของพหุนามในรูปผลสำเร็จ

### ทักษะ/กระบวนการ

- 1) การแก้ปัญหา
- 2) การให้เหตุผล
- 3) การสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ

### ด้านคุณลักษณะ

1. ใฝ่เรียนรู้
2. ทำงานเป็นระบบ รอบคอบ
3. มุ่งในการทำงาน

## กิจกรรมการเรียนรู้

### กิจกรรมนำเข้าสู่การเรียนรู้

3. ครูทบทวนเกี่ยวกับหลักเกณฑ์การบวกและการลบเศษส่วนพหุนาม เช่นเดียวกับการบวกและการลบเศษส่วนดังนี้

เมื่อมี  $P, Q$  และ  $R$  เป็นพหุนาม โดยที่  $Q \neq 0$  จะได้ว่า

$$\frac{P}{Q} + \frac{R}{Q} = \frac{P+R}{Q}$$

และ  $\frac{P}{Q} - \frac{R}{Q} = \frac{P-R}{Q}$

### กิจกรรมพัฒนาผู้เรียน

4. ครูอธิบายโดยยกตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1. จงหาผลบวกของ  $\frac{10x}{x^2-x-72}$  กับ  $\frac{5}{2x+16}$

วิธีทำ 
$$\frac{10x}{x^2-x-72} + \frac{5}{2x+16} = \frac{10x}{(x-9)(x+8)} + \frac{5}{2(x+8)}$$
$$= \frac{2(10x)}{2(x-9)(x+8)} + \frac{5(x-9)}{2(x+8)(x-9)}$$
$$= \frac{20x+5x-45}{2(x+8)(x-9)}$$
$$= \frac{25x-45}{2(x+8)(x-9)} \quad \text{หรือ} \quad \frac{25x-45}{2x^2-2x-144}$$

ตอบ  $\frac{25x-45}{2(x+8)(x-9)}$  หรือ  $\frac{25x-45}{2x^2-2x-144}$

ตัวอย่าง 2. จงหา  $(3y+4) + \frac{6y^2+13y+6}{4y^2+12y+9}$

วิธีทำ 
$$(3y+4) + \frac{6y^2+13y+6}{4y^2+12y+9} = \frac{3y+4}{1} + \frac{(2y+3)(3y+2)}{(2y+3)(2y+3)}$$
$$= \frac{3y+4}{1} + \frac{3y+2}{2y+3}$$
$$= \frac{(3y+4)(2y+3)}{(2y+3)} + \frac{3y+2}{2y+3}$$
$$= \frac{(6y^2+17y+12)+(3y+2)}{2y+3}$$
$$= \frac{6y^2+20y+14}{2y+3}$$

ตอบ  $\frac{6y^2+20y+14}{2y+3}$



ตัวอย่าง 3. จงลบ  $\frac{x^2 - x}{x^2 + 8x - 8}$  ด้วย  $\frac{5x^2 + 5x}{x^2 - 64}$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \frac{x^2 - x}{x^2 + 8x - 8} - \frac{5x^2 + 5x}{x^2 - 64} &= \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+8)} - \frac{5x^2 + 5x}{(x-8)(x+8)} \\ &= \frac{x}{x+8} - \frac{5x^2 + 5x}{(x-8)(x+8)} \\ &= \frac{x(x-8)}{(x+8)(x-8)} - \frac{5x^2 + 5x}{(x-8)(x+8)} \\ &= \frac{x(x-8) - (5x^2 + 5x)}{(x+8)(x-8)} \\ &= \frac{x^2 - 8x - 5x^2 - 5x}{(x+8)(x-8)} \\ &= \frac{-4x^2 - 13x}{(x+8)(x-8)} \quad \text{หรือ} \quad \frac{-4x^2 - 13x}{x^2 - 64} \end{aligned}$$

$$\text{ตอบ} \quad \frac{-4x^2 - 13x}{(x+8)(x-8)} \quad \text{หรือ} \quad \frac{-4x^2 - 13x}{x^2 - 64}$$

ตัวอย่าง 4. จงหา  $\frac{2y+5}{12y^2+11y-6} - \frac{y-7}{y^2+36}$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \frac{2y+5}{12y^2+11y-6} - \frac{y-7}{y^2+36} &= \frac{2y+5}{(2y-1)(y+6)} - \frac{y-7}{(y-6)(y+6)} \\ &= \frac{(2y+5)(y-6)}{(2y-1)(y+6)(y-6)} - \frac{(y-7)(2y-1)}{(y-6)(y+6)(2y-1)} \\ &= \frac{(2y+5)(y-6) - (y-7)(2y-1)}{(2y-1)(y+6)(y-6)} \\ &= \frac{2y^2 - 7y - 30 - 2y^2 + 15y - 7}{(2y-1)(y+6)(y-6)} \\ &= \frac{8y - 37}{(2y-1)(y+6)(y-6)} \quad \text{หรือ} \quad \frac{8y - 37}{2y^3 - y^2 - 72y + 36} \end{aligned}$$

$$\text{ตอบ} \quad \frac{8y - 37}{(2y-1)(y+6)(y-6)} \quad \text{หรือ} \quad \frac{8y - 37}{2y^3 - y^2 - 72y + 36}$$

#### กิจกรรมรวบยอด

5. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 4.1x ในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

#### สื่อ / อุปกรณ์ / แหล่งการเรียนรู้

หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

การวัดและประเมินผล

เป้าหมาย	หลักฐาน	เครื่องมือวัด	เกณฑ์การประเมิน
<b>สาระสำคัญ</b> - การบวกและการลบ เศษส่วนของพหุนาม	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้อง และความเข้าใจ
<b>คุณลักษณะอันพึงประสงค์</b> - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน	- การเข้าเรียน และการ ทำงาน	- เข้าเรียน - มีส่วนร่วมในกิจกรรม การเรียนรู้	- เข้าเรียนตรงเวลา - เมื่อครูถาม นักเรียนมี ความกระตือรือร้นใน การตอบ
<b>สมรรถนะ</b> - การแก้ปัญหา - การให้เหตุผล - ความสามารถในการ สื่อสาร การสื่อความหมาย	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้อง และความเข้าใจ

Created by Ketum Saraburin , Nattawat Chaiyapong



### แผนการจัดการเรียนรู้ที่ ๓

หน่วยการเรียนรู้ที่ ๔	เศษส่วนของพหุนาม	เรื่อง	การแก้สมการเศษส่วนของพหุนาม
วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม	ชื่อรายวิชา ค ๒๓๒๐๒		กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ ๓	ภาคเรียนที่ ๒	ปีการศึกษา ๒๕๕๘	เวลา ๑ ชั่วโมง
ผู้สอน นายณัฐวัฒน์ ไชยโพธิ์		อาจารย์พีเลียง อาจารย์เกตุม	สระบุรีรินทร์

#### ผลการเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถแก้สมการที่เกี่ยวข้องกับเศษส่วนของพหุนามได้
2. นักเรียนสามารถตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้

#### สาระสำคัญ

การแก้สมการเศษส่วนของพหุนามสามารถทำในทำนองเดียวกับการแก้สมการ แต่มีข้อควรระวังคือ ในการนำพหุนามมาคูณทั้งสองข้างของสมการเพื่อให้ตัวส่วนของเศษส่วนของพหุนามเป็น 1 พหุนามเหล่านั้นต้องไม่เป็นศูนย์

#### ทักษะ/กระบวนการ

- 1) การแก้ปัญหา
- 2) การให้เหตุผล
- 3) การสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ

#### ด้านคุณลักษณะ

1. ใฝ่เรียนรู้
2. ทำงานเป็นระบบ รอบคอบ
3. มุ่งในการทำงาน

## กิจกรรมการเรียนรู้

### กิจกรรมนำเข้าสู่การเรียนรู้

5. ครูทบทวนการหาคำตอบของสมการดังกล่าว โดยการยกตัวอย่างต่อไปนี้

$$\text{ตัวอย่าง จงแก้สมการต่อไปนี้ 1. } \frac{9x}{2} - \frac{3x}{5} = 13$$

$$2. 15x^2 - 77x = -10$$

### กิจกรรมพัฒนาผู้เรียน

6. ครูอธิบายว่า การแก้สมการเศษส่วนของพหุนามสามารถทำในทำนองเดียวกับการแก้สมการ แต่มีข้อควรระวังคือในการนำพหุนามมาคูณทั้งสองข้างของสมการเพื่อให้ตัวส่วนของเศษส่วนของพหุนามเป็น 1 พหุนามเหล่านั้นต้องไม่เป็นศูนย์ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$\text{ตัวอย่าง 1. จงแก้สมการ } \frac{5}{x-3} - \frac{30}{x^2-9} = 1$$

วิธีทำ

$$\frac{5}{x-3} - \frac{30}{x^2-9} = 1$$

$$\frac{5}{x-3} - \frac{30}{(x+3)(x-3)} = 1$$

$$\frac{5(x+3)}{(x-3)(x+3)} - \frac{30}{(x+3)(x-3)} = 1$$

$$\frac{5(x+3)-30}{(x+3)(x-3)} = 1$$

นำ  $(x-3)(x+3)$  มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่  $x+3 \neq 0$  และ  $x-3 \neq 0$  จะได้

$$(x+3)(x-3) \left[ \frac{5(x+3)-30}{(x+3)(x-3)} \right] = 1(x+3)(x-3)$$

$$5(x+3)-30 = (x+3)(x-3)$$

$$5x+15-30 = x^2-9$$

$$x^2-5x+6 = 0$$

$$(x-2)(x-3) = 0$$

$$\text{แต่ } x-3 \neq 0$$

$$\text{ดังนั้น } x-2 = 0$$

$$\text{จะได้ } x = 2$$

ให้นักเรียนช่วยกันตรวจสอบคำตอบ

ตอบ 2

ตัวอย่าง 2. จงแก้สมการ  $\frac{5}{x-6} - \frac{3x}{x^2+2x-48} = \frac{4}{x+8}$

วิธีทำ  $\frac{5}{x-6} - \frac{3x}{x^2+2x-48} = \frac{4}{x+8}$

$$\frac{5}{x-6} - \frac{3x}{(x-6)(x+8)} = \frac{4}{x+8}$$

นำ  $(x-6)(x+8)$  มาคูณทั้งสองข้างของสมการ โดยที่  $x+8 \neq 0$  และ  $x-6 \neq 0$  จะได้

$$(x-6)(x+8) \left[ \frac{5}{x-6} \right] - (x-6)(x+8) \left[ \frac{3x}{(x-6)(x+8)} \right] = (x-6)(x+8) \left[ \frac{4}{x+8} \right]$$

$$5(x+8) - 3x = 4(x-6)$$

$$5x + 40 - 3x = 4x - 24$$

$$2x + 40 = 4x - 24$$

$$2x - 4x = -24 - 40$$

$$-2x = -64$$

$$x = 32$$

ให้นักเรียนช่วยกันตรวจสอบคำตอบ

ตอบ 32

### กิจกรรมรวบยอด

5. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 4.2 ในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2  
สื่อ / อุปกรณ์ / แหล่งการเรียนรู้

หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

### การวัดและประเมินผล

เป้าหมาย	หลักฐาน	เครื่องมือวัด	เกณฑ์การประเมิน
<b>สาระสำคัญ</b> - การแก้สมการเศษส่วนของพหุนาม	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ
<b>คุณลักษณะอันพึงประสงค์</b> - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน	- การเข้าเรียน และการทำงาน	- เข้าเรียน - มีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียน	- เข้าเรียนตรงเวลา - เมื่อครูถาม นักเรียนมีความกระตือรือร้นในการตอบ
<b>สมรรถนะ</b> - การแก้ปัญหา - การให้เหตุผล - ความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมาย	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจ



#### แผนการจัดการเรียนรู้ที่ ๔

หน่วยการเรียนรู้ที่ ๔      เศษส่วนของพหุนาม      เรื่อง    โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเศษส่วนของพหุนาม  
วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม      ชื่อรายวิชา ค ๒๓๒๐๒      กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์  
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ ๓      ภาคเรียนที่ ๒      ปีการศึกษา ๒๕๕๘      เวลา ๑ ชั่วโมง  
ผู้สอน นายณัฐวัฒน์ ไชยโพธิ์      อาจารย์พีเลียง อาจารย์เกตุม์ สาระบุรินทร์

---

#### ผลการเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการเศษส่วนของพหุนามได้
2. นักเรียนสามารถตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบได้

#### สาระสำคัญ

การแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการที่ซับซ้อนขึ้น โดยมีเศษส่วนของพหุนามและการแยกตัวประกอบของพหุนามมาเกี่ยวข้องด้วย

#### ทักษะ/กระบวนการ

- 1) การแก้ปัญหา
- 2) การให้เหตุผล
- 3) การสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ

#### ด้านคุณลักษณะ

1. ใฝ่เรียนรู้
2. ทำงานเป็นระบบ รอบคอบ
3. มุ่งในการทำงาน

## กิจกรรมการเรียนรู้

### กิจกรรมนำเข้าสู่การเรียนรู้

7. ครูทบทวนการแก้โจทย์ปัญหาที่ใช้สมการและมีการแยกตัวประกอบของพหุนามในการแก้สมการที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้ว โดยการยกตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง ช่างตัดเสื้อผ้าซื้อผ้ามาทั้งสิ้น 500 บาท ตัดเก็บไว้ 4 เมตร ที่เหลือขายไปในราคาสูงกว่าต้นทุนเมตรละ 12 บาท ยังได้กำไร 92 บาท ช่างตัดเย็บเสื้อผ้าซื้อผ้ามากี่เมตร และราคาเมตรละเท่าไร

8. ครูทบทวนเกี่ยวกับเรื่องอัตราเร็วในที่นี้เป็นอัตราเร็วเฉลี่ยและสามารถหาได้จากสูตร

$$\text{อัตราเร็ว} = \frac{\text{ระยะทาง}}{\text{เวลา}}$$

### กิจกรรมพัฒนาผู้เรียน

9. ครูอธิบายโดยยกตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1. ในการบินระยะทาง 600 กิโลเมตรครั้งหนึ่ง เครื่องบินต้องบินลงช้ากว่าปกติเพราะมีลมต้านและอากาศแปรปรวน เมื่อตรวจสอบแล้วพบว่าอัตราเร็วลดลงจากปกติ 200 กิโลเมตรต่อชั่วโมง และเสียเวลาเพิ่มขึ้นจากปกติครึ่งชั่วโมง จงหาว่าอัตราเร็วของการบินปกติเป็นเท่าใด

วิธีทำ ให้อัตราเร็วของการบินปกติเป็น  $x$  กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ดังนั้น เวลาที่ใช้ในการบินปกติเป็น  $\frac{600}{x}$  ชั่วโมง

เนื่องจากอัตราเร็วของการบินครั้งนี้เป็น 200 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

ดังนั้น อัตราเร็วของการบินครั้งนี้เป็น  $x-200$  กิโลเมตรต่อชั่วโมง

นั่นคือ เวลาที่ใช้ในการบินครั้งนี้เป็น  $\frac{600}{x-200}$  ชั่วโมง

เนื่องจากการบินครั้งนี้เสียเวลาเพิ่มขึ้นจากปกติครึ่งชั่วโมง

จะได้สมการเป็น  $\frac{600}{x-200} - \frac{600}{x} = \frac{1}{2}$

นำ  $2x(x-200)$  มาคูณทั้งสองข้างของสมการ

จะได้  $600(2x) - 600(2)(x-200) = x(x-200)$

$$1,200x - 1,200x + 240,000 = x^2 - 200x$$

$$x^2 - 200x + 240,000 = 0$$

$$(x-600)(x+400) = 0$$

$$\text{ดังนั้น } x-600 = 0 \text{ หรือ } x+400 = 0$$

$$\text{จะได้ } x = 600 \text{ หรือ } x = -400$$

ให้นักเรียนช่วยกันตรวจสอบคำตอบ

ตอบ 600 กิโลเมตรต่อชั่วโมง

### กิจกรรมรวบยอด

5. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด 4.3 ในหนังสือเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

## สื่อ /อุปกรณ์/ แหล่งการเรียนรู้

หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

### การวัดและประเมินผล

เป้าหมาย	หลักฐาน	เครื่องมือวัด	เกณฑ์การประเมิน
<b>สาระสำคัญ</b> - การแก้โจทย์ปัญหา เกี่ยวกับเศษส่วนของพหุนาม	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้อง และความเข้าใจ
<b>คุณลักษณะอันพึงประสงค์</b> - ใฝ่เรียนรู้ - มุ่งมั่นในการทำงาน	- การเข้าเรียน และการ ทำงาน	- เข้าเรียน - มีส่วนร่วมในกิจกรรม การเรียนรู้	- เข้าเรียนตรงเวลา - เมื่อครูถาม นักเรียนมี ความกระตือรือร้นใน การตอบ
<b>สมรรถนะ</b> - การแก้ปัญหา - การให้เหตุผล - ความสามารถในการ สื่อสาร การสื่อความหมาย	- แบบฝึกหัด	- แบบฝึกหัด	ตรวจสอบความถูกต้อง และความเข้าใจ

Created by Ketum Saraburin , Nattawat Chaiyapoo