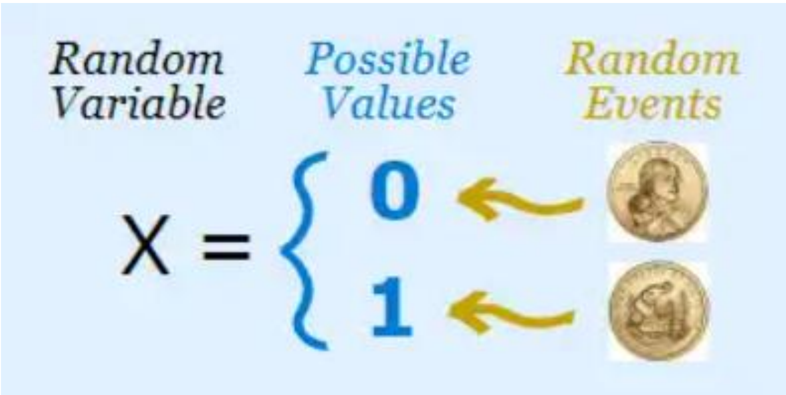
เอกสารประกอบการสอน

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 6 (ค 33202)

ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2

การแจกแจงความน่าจะเป็นเบื้องต้น



โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

บทที่ 1
ตัวแปรสุ่มและความหมายของตัวแปรสุ่ม

---

1. ความหมายของตัวแปรสุ่มและชนิดของตัวแปรสุ่ม

การทดลองสุ่มหรือการทดลองใดๆ ที่เราไม่ทราบผลการทดลองล่วงหน้าจนกว่าจะเสร็จสิ้นการทดลอง แล้วจึงจะทราบผลที่แน่นอน เช่น

ในการโยนเหรียญเที่ยงตรง 1 เหรียญ 3 ครั้ง

ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

จะได้ S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

ซึ่ง n(S) = 8

ให้ E_0 , E_1 , E_2 , E_3 แทนเหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นหัว 0, 1, 2, 3 เหรียญตามลำดับ

จะได้ว่า $P(E_0) = \frac{1}{8}$, $P(E_1) = \frac{3}{8}$, $P(E_2) = \frac{3}{8}$, $P(E_3) = \frac{1}{8}$

จากสถานการณ์ข้างต้น จะเห็นว่าสิ่งที่สนใจไม่ใช่หน้าของเหรียญที่ปรากฏในการโยนเหรียญแต่ละครั้ง แต่สนใจจำนวนครั้งที่เหรียญขึ้นหัวในการทดลองสุ่มนี้ ซึ่งมีค่าที่เป็นไปได้ 4 ค่า คือ 0, 1, 2 และ 3 โดยจะยังไม่ทราบว่าค่าที่ได้จริงๆ คือค่าใดจนกว่าจะเสร็จสิ้นการทดลองสุ่ม

ถ้าให้ X แทนจำนวนเหรียญที่ขึ้นหัวจากการโยนเหรียญ 3 ครั้ง
จึงอาจกำหนดฟังก์ชัน X จากปริภูมิตัวอย่าง S ไปยังเซต {0, 1, 2, 3}
เพื่อแปลงผลลัพธ์ที่อาจเป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองสุ่มให้อยู่ในรูปตัวเลข โดยกำหนดให้

X(HHH) = 3	X(HHT) = 2	X(HTH) = 2	X(HTT) = 1
X(THH) = 2	X(THT) = 1	X(TTH) = 1	X(TTT) = 0

การทอดลูกเต๋า หรือการโยนเหรียญ เมื่อพิจารณาการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง
กำหนดให้ Y แทนผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น Y อาจจะมีค่าเท่ากับ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6

เราจะเรียกตัวแปร X หรือ Y ในที่นี้ว่า **ตัวแปรสุ่ม (random Variable)**

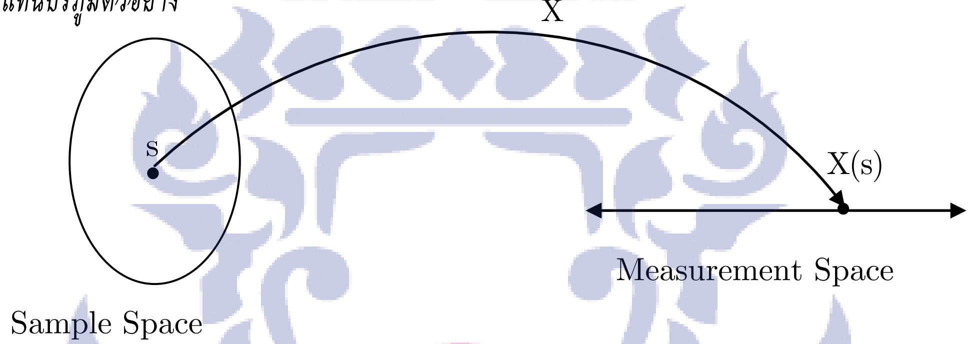
ตัวแปรสุ่ม (Random variable) ตัวแปรที่กำหนดค่าให้กับผลการทดลองที่เกิดขึ้นโดยที่ค่าเหล่านั้น อาจะเป็นค่าจริง หรือฟังก์ชันที่มีค่าจริงก็ได้ ในทางสถิติมักใช้ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่แทนเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในการทดลองสุ่มหนึ่ง ๆ โดยเหตุการณ์นี้จึงเรียกจึงเรียกตัวอักษรนั้น ๆ ว่า "ตัวแปรสุ่ม"

ถ้ารวมทุกๆเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นได้ในการทดลองสุ่มเข้าเป็นเซตแล้ว จะเรียกเซตนั้นว่าเป็น **ปริภูมิตัวอย่าง (Sample Space)** ซึ่งเราจะแทนด้วยสัญลักษณ์ S

“ ดังนั้นตัวแปรสุ่มจึงเป็นฟังก์ชันที่เปลี่ยนทุก ๆ เหตุการณ์ในปริภูมิตัวอย่างให้เป็นตัวเลขนั่นเอง ”

ตัวแปรสุ่ม คือ ฟังก์ชัน มีค่าเป็นเลขจำนวนจริง โดยค่าของมันถูกกำหนดโดยผลลัพธ์ที่ เป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองสุ่ม หรืออาจกล่าวได้ว่า ตัวแปรสุ่ม คือ ฟังก์ชันที่ มีโดเมน (Domain) เท่ากับ Sample Space และมีพิสัย (Range) เป็นเซตย่อยของจำนวนจริง

กำหนดให้ S *แทนปริภูมิตัวอย่าง*



ตัวอย่างของตัวแปรสุ่ม เช่น

- หากโยนเหรียญ 2 อัน 1 ครั้ง

  กำหนดให้ X แทนจำนวนเหรียญที่ขึ้นก้อย ดังนั้นค่าของ X ที่ เป็นไปได้คือ 0, 1 หรือ 2

- กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 4 ลูก สีดำ 3 ลูก สุ่มหยิบลูกบอลมา 2 ลูก โดยหยิบทีละลูกแล้วไม่ใส่คืน

  กำหนดให้ Y คือ จำนวนลูกบอลสีแดงที่หยิบได้ดังนั้นค่าของ Y ที่เป็นไปได้คือ 0,1 หรือ 2

- ในการชั่งน้ำหนักของเด็กแรกเกิดที่คลอด ณ โรงพยาบาลแห่งหนึ่ง

  กำหนดให้ Z แทนน้ำหนักของ เด็กแรกเกิด ซึ่งมีค่าที่เป็นไปได้คือ $0 < Z < 8000$ กรัม

ตัวแปรสุ่มแบ่งออกเป็น 2 ชนิดดังนี้

ตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง (Discrete random variable)

ตัวแปรสุ่ม X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง ก็ต่อเมื่อ เรนจ์ของฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มเป็นสับเซตของจำนวนนับ หรืออาจกล่าวได้ว่าทุกๆค่าของ X ถูกกำหนดได้ด้วยจำนวนนับใดๆ

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง ค่าของ X จะมีค่าได้เพียงบางค่าและค่าไม่ต่อเนื่องกัน มักจะเป็นจำนวนนับ โดยจำนวนค่าที่เป็นไปได้ของ X เป็นจำนวนจำกัดหรือไม่จำกัดแต่นับได้ เช่น

ให้ X คือจำนวนนักเรียนที่ขาดเรียน
จะได้ว่า X เป็นตัวแปรสุ่ม โดยที่ $x = 0 , 1 , 2 , \dots n$

ให้ Y เป็นจำนวนเหรียญที่เกิดหัวของการโยนเหรียญ 3 เหรียญ 1 ครั้ง
จะได้ Y เป็นตัวแปรสุ่ม โดยที่ $y = 0, 1, 2, 3$

ตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง (Continuous Random Variable)

ตัวแปรสุ่ม X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ก็ต่อเมื่อ เรนจ์ของฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มเป็นสับเซตของจำนวนจริง หรืออาจจะมีค่าเป็นจำนวนใดๆก็ได้ในช่วงที่ต่อเนื่องกัน ซึ่งไม่สามารถนับได้ว่ามี X จำนวนเท่าใดในช่วงนั้นๆ เช่น

ให้ X เป็นส่วนสูงของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ค่าของ X จะอยู่ ในช่วง 150 – 180 เซนติเมตร เขียนแทนด้วย $150 \le X \le 180$ จะเห็นได้ว่าค่าของ X มีค่าเป็นจำนวนจริงที่มีค่าอยู่ระหว่าง 150 ถึง 180 เซนติเมตร และสามารถมีค่าเป็นทศนิยมได้ด้วย

ข้อสังเกต ข้อมูลทางสถิติที่มีหน่วยเป็นมาตรา ชั่ง ตวง วัด จะเป็นข้อมูลต่อเนื่อง เช่น มาตราวัดระยะทาง ส่วนสูง น้ำหนัก อุณหภูมิ เวลา เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 1 ดูหนังสือแบบฝึกหัดหน้าที่ 83

การแจกแจงความน่าจะเป็น (Probability distribution)

การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบ่งเป็น 2 ประเภทดังนี้

(1) การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง

เนื่องจากตัวแปรสุ่มเป็นเซตของจำนวนซึ่งใช้แทนสมาชิกในปริภูมิตัวอย่าง และสมาชิกในปริภูมิตัวอย่างยังเกิดความน่าจะเป็นที่แตกต่างกัน ดังนั้นการที่จะมีตัวแปรสุ่มตัวหนึ่งๆ เกิดขึ้นได้ก็ย่อมเกิดขึ้นด้วยความน่าจะเป็นที่แตกต่างกัน

ถ้าให้ X แทนตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง

และ x_i แทนค่าของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง โดยที่ i = 1, 2, 3, ...

แล้วจะเรียกความน่าจะเป็นของ x_i ว่า "**ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น** (probability density function : p.d.f.) หรือ**ฟังก์ชันความน่าจะเป็น** (probability function) " เขียนแทนสัญลักษณ์ $p(x_i)$ หรือ $P(X = x_i)$ หรือ $f(x_i)$ และเรียกการแจกแจงของค่าของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง X นี้ว่า "การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง

คุณสมบัติของฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง

กำหนดให้ X แทนตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องซึ่งอยู่ในปริภูมิตัวอย่าง S โดยที่ S = R เมื่อ R แทนเซตของจำนวนจริง และ $x = x_1 , x_2 , x_3 , \ldots$ จะได้ว่า

1. $f(x_i) \geq 0$ เมื่อ $x_i \in R$ และ $f(x_i) = 0$ เมื่อ $x \notin R$
2. $\sum_{x_i \in R} f(x_i) = 1$
3. $P(x_i \in A) = \sum_{x_i \in A} f(x_i)$ เมื่อ $A \subset R$

ตัวอย่างที่ 2 จากการทดลองสุ่มโยนเหรียญเที่ยงตรง 1 เหรียญ 3 ครั้ง ถ้ากำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนครั้งที่เหรียญขึ้นหัว จงสร้างตารางแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X

วิธีทำ เนื่องจากปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้คือ

S = { HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT }

จะได้ x = 0, 1, 2, 3

$P(X = 0)$ หมายถึงความน่าจะเป็นที่เหรียญไม่ขึ้นหัวเลย จะได้ $P(X = 0) = \frac{1}{8}$

$P(X = 1)$ หมายถึงความน่าจะเป็นที่เหรียญขึ้นหัว 1 เหรียญ จะได้ $P(X = 1) = \frac{3}{8}$

$P(X = 2)$ หมายถึงความน่าจะเป็นที่เหรียญขึ้นหัว 2 เหรียญ จะได้ $P(X = 2) = \frac{3}{8}$

$P(X = 3)$ หมายถึงความน่าจะเป็นที่เหรียญขึ้นหัว 3 เหรียญ จะได้ $P(X = 3) = \frac{1}{8}$

สามารถแสดงค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ทุกๆ ค่าที่เป็นไปได้ดังนี้

x	เหตุการณ์	$P(X = x) = f(x)$
0	TTT	$\frac{1}{8}$
1	HTT , THT , TTH	$\frac{3}{8}$
2	HHT , HTH , THH	$\frac{3}{8}$
3	HHH	$\frac{1}{8}$

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นได้ว่า P(X = x) จะมี ค่าเป็นเท่าใดขึ้นอยู่กับค่าของ x หรืออาจกล่าวได้ ว่า P(X = x) เป็นฟังก์ชันของ x จึงสามารถเขียนแทนได้ ด้วย f(x) จากตาราง เช่น

$$f(0) = \frac{1}{8}\ ,\ \ f(1) = \frac{3}{8}\ ,\ f(2) = \frac{3}{8}\ \ \text{และ}\ \ f(3) = \frac{1}{8}$$

โดยจะเห็นว่า f(x) เป็นฟังก์ชันความนาจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X เนื่องจาก

$f(x) \geq 0$ สำหรับทุกค่าของ x เมื่อ x = 0, 1, 2, 3

และ $\sum_{x=0}^{3} f(x) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

ตัวอย่างที่ 3 กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีดำ 2 ลูก สีขาว 2 ลูก สุ่มหยิบลูกบอลมา 2 ลูก กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนลูกบอลสีขาวที่สุ่มหยิบได้ จงสร้างตารางแจกแจงความน่าจะเป็นของ X

ตัวอย่างที่ 4 ในการโยนลูกเต๋าเที่ยงตรง 2 ลูก กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนผลรวมของลูกเต๋า 2 ลูก จงสร้างตารางแจกแจงความน่าจะเป็นของ X

(2) การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง

ในกรณีที่ตัวแปรสุ่ม X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องนั้นจะสามารถหาการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ได้ ดังนี้

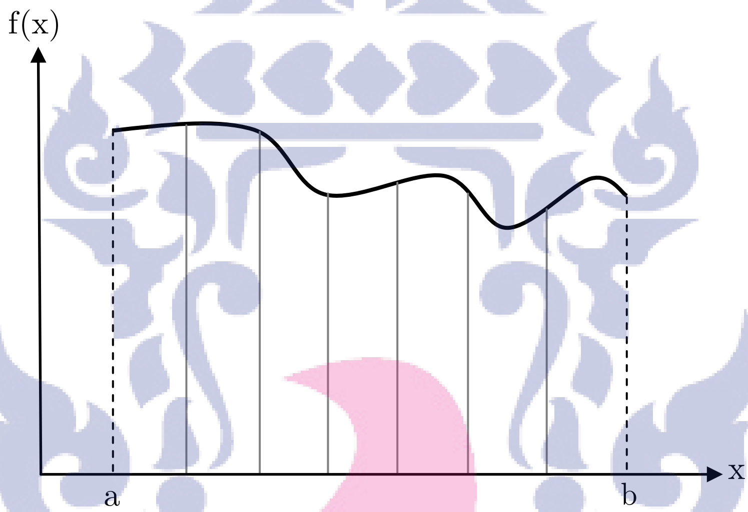
กำหนดให้ X แทนตัวแปรสุ่ม ถ้าค่าที่ใช้แทนเหตุการณ์ที่สามารถเขียนแทนด้วยช่วงของตัวเลขแล้วจะเรียกตัวแปรสุ่มชนิดนี้ว่า **"ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง (continuous random variable)"**

ตัวอย่างเช่น C แทนจำนวนจริงที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ 1 นั่นคือ $0 < x < 1$ เป็นต้น
จะเรียกความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มต่อเนื่องว่า "ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น" เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ f(x)

ความน่าจะเป็นของ X คือพื้นที่ใต้เส้นโค้งของฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น f(x) ซึ่งเส้นโค้ง f(x) จะมีรูปร่างอย่างไรก็ได้ แต่ต้องอยู่เหนือแกน X เสมอ ถ้าเรนจ์ของ f(x) เป็นเซตของจำนวนจริงที่มีค่าอยู่ระหว่าง a และ b แล้วความน่าจะเป็นของของตัวแปรสุ่มต่อเนื่องมีค่าอยู่ระหว่าง a และ b คือพื้นที่ใต้เส้นโค้งของ f(x) ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ดังนี้

$$P(a < X < b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

และพื้นที่รวมทั้งหมดของ f(x) รวมกันเท่ากับ 1 นั่นคือ $\int_a^b f(x)dx = 1$



(ภาพแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งของฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นเมื่อ a < X < b)

ข้อสังเกต เนื่องจากฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มต่อเนื่องเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางขวา จะได้ว่าความน่าจะเป็น ณ จุดใดๆ จะมีค่าเป็นศูนย์เสมอ นั่นคือ $P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$

สมบัติของฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง
กำหนดให้ X แทนตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง จะได้ว่า

1. $f(x_i) \ge 0$ สำหรับทุกค่าของ x_i ซึ่งอยู่ในช่วงที่ต่อเนื่อง
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
3. $P(a < X < b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$

ตัวอย่างที่ 5 ให้ X เป็นสัดส่วนของปริมาณตะกั่วในโลหะผสมชนิดหนึ่ง โดยมีฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} 20x^3(1-x) & ;\ 0 < x < 1 \\ 0 & ;\ \text{อื่นๆ} \end{cases}$$

1. จงแสดงว่า f(x) เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X
2. จงหา $P\left(X < \frac{2}{3}\right)$

วิธีทำ

1. 1) สำหรับ $0 < x < 1$ ทำให้ $1 - x > 0$ และ $x^3 > 0$

ดังนั้น $20x^3(1-x) > 0$

ดังนั้น $f(x) \geq 0$ สำหรับทุกค่า x ที่อยู่ในช่วง $0 < x < 1$

2) และ
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{\infty} f(x)\,dx$$
$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1} 20x^3(1-x)\,dx + \int_{1}^{\infty} 0\,dx$$
$$= 0 + \left(\frac{20x^4}{4} - \frac{20x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 + 0$$
$$= \left(5x^4 - 4x^5\right)\Big|_0^1$$
$$= (5-4) - (0-0)$$
$$= 1$$

จาก 1) และ 2) แสดงว่า f(x) เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X

2.
$$P(X < \frac{2}{3}) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\frac{2}{3}} f(x)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\frac{2}{3}} 20x^3(1-x)dx$$
$$= 0 + \left(\frac{20x^4}{4} - \frac{20x^5}{5}\right)\Bigg|_0^{\frac{2}{3}}$$
$$= 0 + \left(5x^4 - 4x^5\right)\Big|_0^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left(5(\frac{2}{3})^4 - 4(\frac{2}{3})^5\right) - (0 - 0)$$

$$= \frac{112}{243}$$

$$\approx 0.461$$

ตัวอย่างที่ 6 ถ้า X แทนตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่มีค่า x อยู่ระหว่าง 2 และ 4 และมีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{8} & ; \ 2 < x < 4 \\ 0 & ; \ \text{อื่นๆ} \end{cases}$$

จงหา

1. $P\left(2 < X < 4\right)$
2. $P(X > 2.5)$
3. $P(X < 3)$

ค่าคาดหมายหรือค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม (Expected Value หรือ Expectation)

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่ม แล้วค่าของ X จะมีได้หลายค่าด้วยความน่าจะเป็นที่แตกต่างกันแล้วแต่ว่าตัวแปรสุ่มนั้นจะมีการแจกแจงความน่าจะเป็นในรูปแบบใด โดยทั่วไปค่าซึ่งถือว่าเป็นตัวแทนที่ดีที่สุดของการแจกแจงหนึ่งคือค่าเฉลี่ยของการแจกแจงซึ่งวัดได้ด้วยค่าคาดหมายหรือค่าคาดหวัง

ถ้า f(x) เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X แล้วจะได้ค่าคาดหมายหรือค่าคาดหวังของตัวแปรเขียนแทนด้วย E(X) หรือ μ_X หรือ μ

ค่าคาดหมายของตัวแปรสุ่มแบ่งออกเป็น 2 ประเภท ดังนี้

(1) ค่าควาดหมายของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องจะได้ว่าค่าคาดหมายของตัวแปรสุ่ม X หาได้ดังนี้

$$E(X) = \mu_X = \sum_{\text{all } x} xf(x)$$

(2) ค่าคาดหมายของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องจะได้ว่าค่าคาดหมายของตัวแปรสุ่ม X หาได้ดังนี้

$$E(X) = \mu_X = \int_{\text{all } x} xf(x)\,dx$$

คุณสมบัติของค่าคาดหมายของตัวแปรสุ่ม

กำหนดให้ X และ Y แทนตัวแปรสุ่ม

a และ b แทนค่าคงตัว

จะได้ว่า

1. $E(aX + b) = aE(x) + b$
2. $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$
3. $E(XY) = E(X)E(Y)$ เมื่อ X และ Y เป็นอิสระต่อกัน
4. $E[U(X)] = \sum_{\text{all } x} U(X)f(x)$ เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง

   $E[U(X)] = \int_{\text{all } x} U(X)f(x)\,dx$ เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง

ตัวอย่างที่ 7 จากการทดลองสุ่มโยนเหรียญเที่ยงตรง 1 เหรียญ 3 ครั้ง
ถ้ากำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนครั้งที่เหรียญขึ้นหัว
จงหาค่าคาดหมายของตัวแปรสุ่ม X

วิธีทำ

เนื่องจากปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้คือ

S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

จะได้ x = 0, 1, 2, 3

สามารถแสดงค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ทุกๆ ค่าที่เป็นไปได้ดังนี้

x	เหตุการณ์	$P(X = x) = f(x)$
0	TTT	$\frac{1}{8}$
1	HTT , THT , TTH	$\frac{3}{8}$
2	HHT , HTH , THH	$\frac{3}{8}$
3	HHH	$\frac{1}{8}$

จะได้
$$E(X) = \sum_{x=0}^{3} xf(x)$$
$$= 0f(0) + 1f(1) + 2f(2) + 3f(3)$$
$$= 0\left(\frac{1}{8}\right) + 1\left(\frac{3}{8}\right) + 2\left(\frac{3}{8}\right) + 3\left(\frac{1}{8}\right)$$
$$= \frac{12}{8}$$
$$= 1.5$$

นั่นคือ ในการโยนเหรียญเที่ยงตรง 1 เหรียญ 3 ครั้ง โดยเฉลี่ยแล้วเหรียญขึ้นหัว 1.5 ครั้ง

ตัวอย่างที่ 8 ถ้านำรถยนต์คันหนึ่งไปทำประกันกับบริษัทประกันภัยในราคา 700,000 บาท โดยที่ผู้ทำประกันต้องจ่ายเบี้ยประกัน 15,000 บาทต่อปี ถ้าโอกาสที่รถยนต์จะถูกขโมยในช่วงระยะเวลา 1 ปี เท่ากับ 0.01 อยากทราบว่ากำไรที่บริษัทประกันภัยคาดว่าจะได้เป็นเท่าไรต่อปี

วิธีทำ ให้ X แทน กำไรที่บริษัทประกันภัยได้

จาก กำไร = รายได้ – รายจ่าย

ถ้ารถยนต์ถูกขโมย

จะได้ กำไร = 15,000 – 700,000 = –685,000 บาท

ด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ 0.01

ถ้ารถยนต์ไม่ถูกขโมย

จะได้กำไร = 15,000 – 0 = 15,000

ด้วยความน่าจะเป็น 1 – 0.01 = 0.99

ดังนั้นฟังก์ชันความน่าจะเป็นคือ

$$f(x) = \begin{cases} 0.01 & ; x = -685,000 \\ 0.99 & ; x = 0 \end{cases}$$

กำไรที่คาดว่าจะได้รับ คือ ค่าคาดหวัง คำนวณหาค่าคาดหวังจาก

$$E(x) = \mu_X = \sum_{\text{all } x} xf(x) = -658,000(0.01) + 15,000(0.99) = 8,000$$

ดังนั้น กำไรที่บริษัทประกันภัยคาดว่าจะได้เป็นเท่าไรต่อปีเท่ากับ 8,000 บาท

แบบฝึกหัดที่ 1

1. กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอล 10 ลูก ซึ่งประกอบด้วยสีแดง 6 ลูก และสีขาว 4 ลูก สุ่มหยิบลูกบอลขึ้นมา 3 ลูก ถ้ากำหนดให้ X เป็นจำนวนลูกบอลสีแดงที่หยิบได้ จงหาค่าคาดหมายของตัวแปรสุ่ม X

2. ถ้า X เป็นจำนวนรถยนต์ที่มาใช้บริการล้างรถที่สถานีบริการแห่งหนึ่ง ในวันเสาร์เวลา 16.00 – 17.00 น. โดยมรการแจกแจงความน่าจะเป็น ดังนี้

x	4	5	6	7	8	9
$P(X = x) = f(x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

ถ้า $U(x) = 2x - 1$ เป็นจำนวนเงินที่สถานีบริการต้องจ่ายแก่พนักงานล้างรถ (หน่วย 10 บาท) แล้วจงหาค่าคาดหมายของจำนวนเงินที่พนักงานล้างรถจะได้รับจากการ ทำงานนี้

3. ถ้านายเอชวนนายบีเล่นโยนเหรียญ 2 อัน 1 ครั้ง โดยถ้านายบีทายว่าออกหัว (หัว 2 อัน) และทายถูกนายเอจะจ่ายเงินให้ 2 เท่า แต่ถ้านายบีทายว่าออกกลาง (หัว 1 อัน ก้อย 1 อัน) และทายถูก นายเอจะจ่ายเงินให้ 1 เท่า ถ้านายบีทายว่าออกก้อย (ก้อย 2 อัน) และทายถูก นายเอ จะจ่ายเงินให้ 2 เท่า แต่ถ้านายบีทายไม่ถูก นายเอจะริบเงินจากนายบี เมื่อโยนเหรียญถ้านายบี ทายว่าออกหัว โดยใช้เงิน 10 บาท จงหาค่าคาดหวังของเงินกำไรที่นายบีจะได้รับจากนายเอ

4. ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มี p.d.f. ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} \frac{25}{2}x & ; \ 0 < x < 0.4 \\ 0 & ; \ \text{อื่นๆ} \end{cases}$$

จงหาค่าคาดหมายของตัวแปรสุ่ม X

2. การแจกแจงความน่าจะเป็นชนิดไม่ต่อเนื่องบางชนิด

2.1 การแจกแจงเอกรูปไม่ต่อเนื่อง (Discrete Uniform Distribution)

บทนิยาม 3 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องถ้าค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ X คือ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ แล้วการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X เป็น**การแจกแจงเอกรูปไม่ต่อเนื่อง** (discrete uniform distribution) เมื่อ

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n} \text{ สำหรับทุก } i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

จากบทนิยามจะเห็นว่าการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มจะเป็นการแจกแจงเอกรูปไม่ต่อเนื่องเมื่อการเกิดค่าแต่ละค่าที่เป็นไปได้ของตัวแปรสุ่มมีความน่าจะเป็นเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 1 ในการทอดลูกเต๋าที่เที่ยงตรง 1 ลูก 1 ครั้งให้ตัวแปรสุ่ม X คือแต้มบนหน้าลูกเต๋า จงพิจารณาว่าการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X เป็นการแจกแจงเอกรูปไม่ต่อเนื่องหรือไม่ พร้อมทั้งเขียนแสดงการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ในรูปตารางและกราฟ

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 2 ลูกคิดสุ่มหยิบสลาก 1 ใบจากกล่องที่บรรจุสลาก 4 ใบ แต่ละใบระบุจำนวนเงินรางวัลแตกต่างกันคือ 20, 50, 100 และ 500 บาทให้ตัวแปรสุ่ม X คือจำนวนเงินรางวัลที่ลูกคิดจะได้รับ

1) จงพิจารณาว่าการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X เป็นการแจกแจงเอกรูปไม่ต่อเนื่องหรือไม่
2) ค่าคาดหมายของตัวแปรสุ่ม X
3) ถ้าลูกคิดต้องจ่ายเงินซื้อตั๋วราคา 150 บาทเพื่อหยิบสลาก 1 ใบ จงพิจารณาว่าถ้าลูกคิดสุ่มหยิบสลากหลาย ๆ ครั้งโดยเฉลี่ยแล้วลูกคิดได้เปรียบหรือเสียเปรียบ

วิธีทำ

แบบฝึกหัด 2.1

---

1. จงพิจารณาว่าการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มต่อไปนี้เป็นการแจกแจงเอกรูปไม่ต่อเนื่องหรือไม่ พร้อมทั้งให้เหตุผลประกอบ
   1) ตัวแปรสุ่ม X_1 คือจำนวนครั้งที่เหรียญขึ้นหัวจากการโยนเหรียญที่เที่ยงตรง 1 เหรียญ 1 ครั้ง
   2) ตัวแปรสุ่ม X_2 คือจำนวนครั้งที่เหรียญขึ้นก้อยจากการโยนเหรียญที่เที่ยงตรง 1 เหรียญ 10 ครั้ง
   3) ตัวแปรสุ่ม X_3 คือผลรวมของเงินรางวัลที่ได้รับจากการสุ่มหยิบสลาก 1 ใบพร้อมกันจากกล่องที่บรรจุสลาก 4 ใบโดยแต่ละใบระบุจำนวนเงินรางวัลแตกต่างกันคือ 10, 30, 60 และ 80 บาท
   4) ตัวแปรสุ่ม X_4 คือจำนวนสินค้าที่ไม่ผ่านมาตรฐานเมื่อสุ่มกล่องสินค้ามา 1 กล่องจากกล่องสินค้าทั้งหมด 80 กล่อง โดยข้อมูลจำนวนสินค้าที่ไม่ผ่านมาตรฐานในแต่ละกล่องแสดงด้วยตารางความถี่ได้ดังนี้

จำนวนสินค้าที่ไม่ผ่านมาตรฐานในแต่ละกล่อง (ชิ้น)	0	1	2	3	4
จำนวนกล่อง	16	16	16	16	16

2. ถ้าการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X เป็นการแจกแจงเอกรูปไม่ต่อเนื่องและค่าที่เป็นไปได้ของตัวแปรสุ่ม X คือ 5, 6, 7, 8, 9 และ 10 จงหาค่าคาดหมายความแปรปรวนและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรสุ่ม X

2.2 การแจกแจงทวินาม

นักเรียนได้ศึกษาเกี่ยวกับการแจกแจงเอกรูปไม่ต่อเนื่องซึ่งเป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มอย่างง่ายเนื่องจากการเกิดค่าแต่ละค่าที่เป็นไปได้ของตัวแปรสุ่มมีความน่าจะเป็นเท่ากันซึ่งอาจพบได้ไม่มากนักในชีวิตจริงสำหรับหัวข้อนี้จะศึกษาเกี่ยวกับการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มที่มีลักษณะเฉพาะประเภทหนึ่งซึ่งความละค่าที่เป็นไปได้ของตัวแปรสุ่มไม่จำเป็นต้องเท่ากัน เช่น

เมื่อกำหนดให้ตัวแปรสุ่ม X คือจำนวนครั้งที่เหรียญขึ้นหัวจากการโยนเหรียญที่เที่ยงตรง 1 เหรียญ 3 ครั้งจะได้ว่าเป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องสังเกตว่าในแต่ละครั้งที่โยนเหรียญจะมีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ 2 แบบคือเหรียญขึ้นหัวหรือก้อย แต่จากการกำหนดตัวแปรสุ่ม X จะเห็นว่าสนใจจำนวนครั้งที่เหรียญขึ้นหัวจึงอาจพิจารณาว่าในการโยนเหรียญแต่ละครั้งถ้าเหรียญขึ้นหัวสำเร็จแต่ถ้าเหรียญขึ้นก้อยคือไม่สำเร็จดังนั้นสามารถพิจารณาว่าตัวเปรสุ่มคือจำนวนครั้งของการเกิดผลสำเร็จจากการโยนเหรียญที่เที่ยงตรง 1 เหรียญเป็นจำนวน 3ครั้งเช่นเหตุการณ์ที่ $\mathrm{X} = 1$ ซึ่งคือ $\{\mathrm{HTT},\ \mathrm{THT},\ \mathrm{TTH}\}$ หมายความว่าแต่ละสมาชิกในเหตุการณ์นี้ติดผลสำเร็จ 1ครั้ง (เหรียญขึ้นหัว 1 ครั้ง) และไม่เกิดผลสำเร็จ 2 ครั้ง (เหรียญขึ้นก้อย 2 ครั้ง)นอกจากนี้จะเห็นว่าผลที่ได้จากการโยนเหรียญในครั้งก่อนหน้าไม่ส่งผลต่อการโยนเหรียญครั้งต่อไปและความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลสำเร็จในการโยนเหรียญแต่ละครั้งเท่ากันคือ $\frac{1}{2}$

การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มในตัวอย่างข้างต้นเรียกว่าการแจกแจงทวินาม ซึ่งมีบทนิยามดังนี้

บทนิยาม 4

การแจกแจงทวินาม (binomial distribution) คือ
การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ซึ่งคือจำนวนครั้งของการเกิดผลสำเร็จจากการทดลองสุ่ม n ครั้งที่เป็นอิสระกันโดยในแต่ละครั้งมีโอกาสเกิดผลสำเร็จด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ p และไม่เกิดผลสำเร็จด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ 1-p

หมายเหตุ
1. เรียก nและ pว่า**พารามิเตอร์ของการแจกแจงทวินาม**และเขียนสัญลักษณ์ $\mathrm{X} \sim \mathrm{B}(\mathrm{n},\mathrm{p})$ เพื่อแสดงว่าการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X เป็นการแจกแจงทวินามที่มี n และ p เป็นพารามิเตอร์
2. การทดลองสุ่ม 1 ครั้งที่มีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ 2แบบคือสำเร็จหรือไม่สำเร็จเรียกว่า **การลองแบร์นูลลี (Bernoulli trial)**เช่นการโยนเหรียญ 1 เหรียญ 1 ครั้ง

จากบทนิยามข้างต้นสรุปได้ว่าการแจกแจงทวินามคือการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องที่มีลักษณะดังต่อไปนี้
1. เกิดจากการทดลองสุ่มจำนวน n ครั้งที่เป็นอิสระกันกล่าวคือผลที่ได้จากการทดลองสุ่ม ในครั้งก่อนหน้า ไม่ส่งผลต่อการทดลองสุ่มในครั้งต่อๆไป
2. การทดลองสุ่มแต่ละครั้งมีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้เพียง 2 แบบคือ สำเร็จหรือไม่สำเร็จ
3. ความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลสำเร็จในการทดลองสุ่มแต่ละครั้งเท่ากันให้เป็น p เมื่อ $0 < \mathrm{p} < 1$ และจะได้ว่าความน่าจะเป็นที่จะไม่เกิดผลสำเร็จในการทดลองสุ่มแต่ละครั้งเป็น $1 - \mathrm{p}$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ใช้ในการหาความน่าจะเป็นค่าคาดหมายและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงความน่าจะเป็นเป็นการแจกแจงทวินามโดยในที่นี้จะขอละการพิสูจน์

ทฤษฎีบท 1

ถ้าการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มX เป็นการแจกแจงทวินาม จะได้ว่า

1. $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ สำหรับทุก $x \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$
2. $\mu_x = np$
3. $\sigma_x = \sqrt{np(1-p)}$

เมื่อ n แทนจำนวนครั้งของการทดลองสุ่ม

และ p แทนความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลสำเร็จในการทดลองสุ่มแต่ละครั้ง

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบท 1 ข้อ 1 และทฤษฎีบททวินามจะได้ว่า

$$\sum_{x=0}^{n} P(X = x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = (p + (1-p))^n = 1$$

ตัวอย่างที่ 10 กำหนดให้ $X \sim B(5, 0.2)$ จงหา

1) $P(X = 3)$ 2) $P(X \le 3)$

3) $P(X > 4)$ 4) $P(3 \le X \le 5)$

ตัวอย่างที่ 11 ให้ตัวแปรสุ่ม X คือจำนวนครั้งที่ลูกเต๋าขึ้นแต้ม 5 จากการทอดลูกเต๋าที่เที่ยงตรง 1 ลูก 7 ครั้ง

1) จงพิจารณาว่าการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X เป็นการแจกแจงทวินามหรือไม่
2) จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าขึ้นแต้ม 5 เป็นจำนวน 5 ครั้ง
3) จงเขียนแสดงการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ในรูปตารางและกราฟ
4) จงหาค่าคาดหมายและความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม X

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 12 ในการรักษาโรคมะเร็งด้วยสมุนไพรที่คิดค้นขึ้นมาใหม่พบว่าเมื่อผู้ป่วยรับประทานสมุนไพรชนิดนี้ต่อเนื่องกันไปตามแพทย์สั่งในช่วงระยะเวลาหนึ่งความน่าจะเป็นที่ผู้ป่วยแต่ละคนจะหายจากโรคมะเร็งเป็น 0.5 ถ้านักวิจัยสุ่มผู้ป่วยโรคมะเร็งที่มารับการรักษาด้วยสมุนไพรนี้จำนวน 6 คน

1) จึงหาความน่าจะเป็นที่จะมีผู้ป่วยหายจากโรคมะเร็งอย่างน้อย 3 คน
2) จงหาค่าคาดหมายและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของจำนวนผู้ป่วยที่หายจากโรคมะเร็งพร้อม ทั้งอธิบายความหมาย

วิธีทำ