เอกสารประกอบการสอน

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2 (ค 31204)

ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 2

ตรรกศาสตร์เบื้องต้น

โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

โครงการสอน

วิชา ค 31204 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2 **สถานภาพรายวิชา เพิ่มเติม**

จำนวน 2 คาบต่อสัปดาห์ **จำนวน 1.0 หน่วยกิต**

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 **ภาคเรียนที่ 2**

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ **โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา**

****

ผลการเรียนรู้

1. เข้าใจและใช้ความรู้เกี่ยวกับตรรกศาสตร์เบื้องต้นในการสื่อสาร สื่อความหมาย และอ้างเหตุผล
2. เข้าใจและใช้ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ในการแก้ปัญหา

สาระการเรียนรู้และรายละเอียดกำหนดการสอนเนื้อหาในแต่ละสัปดาห์

สาระการเรียนรู้	เรื่อง	จำนวนคาบ
1. ตรรกศาสตร์เบื้องต้น	1.1 ประโยคเปิด	2
	1.2 ตัวบ่งปริมาณ	2
	1.3 ค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณตัวเดียว	2
	1.4 ค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณสองตัว	4
	1.5 สมมูลและนิเสธของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ	4
2. เรขาคณิตวิเคราะห์	2.1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์	2
	2.2 ระยะทางระหว่างจุดสองจุด	1
	2.3 จุดบนส่วนของเส้นตรง	2
	สอบกลางภาค : สาระการเรียนรู้ที่ 1 และ 2 หัวข้อ 1.1 – 2.3.	1
	2.4 ความชันของเส้นตรง	1
	2.5 เส้นขนานและเส้นตั้งฉาก	2
	2.6 สมการเส้นตรง	2
	2.7 ระยะห่างระหว่างจุดและเส้นตรง	2
	2.8 วงกลม วงรี พาราโบลา ไฮเพอร์โบลา	12
	สอบปลายภาค : สาระการเรียนรู้ที่ 2 หัวข้อ 2.4 – 2.8	1
	รวม	40

ตรรกศาสตร์เบื้องต้น

1. ประพจน์ (Proposition)

บทนิยาม **ประพจน์** คือ ประโยคหรือข้อความที่สามารถบอกค่าความจริงว่าเป็นจริงหรือเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

ความเป็น **จริง** หรือ **เท็จ** ของประพจน์ เราเรียกว่า ค่าความจริงของประพจน์ ในที่นี้เราจะใช้ตัวอักษร T และ F แทนค่าความจริงที่เป็นจริง และเป็นเท็จ ตามลำดับ

ประโยคที่ไม่เป็นประพจน์ คือ ประโยคที่ไม่มีค่าความจริง ซึ่งพอจะแยกได้เป็น 2 ประเภท

ประเภทที่ 1 ได้แก่ประโยคที่ไม่อยู่ในรูปประโยคบอกเล่าหรือปฏิเสธ เช่น ประโยคคำถาม คำสั่ง ห้าม ขอร้อง คำอุทาน หรือ อ้อนวอน เป็นต้น

ประเภทที่ 2 ได้แก่ประโยคบอกเล่า หรือปฏิเสธ แต่ไม่มีค่าความจริง เนื่องมาจากสิ่งที่เราไม่ทราบว่าเป็นอะไรแน่ชัด ซึ่งเรียกว่าตัวแปร จึงบอกไม่ได้ว่า เป็นจริงหรือเท็จ

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงพิจารณาประโยคต่อไปนี้ว่าเป็นประพจน์หรือไม่ ถ้าเป็นประพจน์จงบอกค่าความจริงของประพจน์นั้น

ประโยค	เป็นประพจน์	ไม่เป็นประพจน์	ค่าความจริง
ช้างเป็นสัตว์สี่ขา			
ข้าวเป็นอาหารหลักของคนไทย			
ห้ามส่งเสียงดัง			
เขาเป็นนักเรียนที่เก่งที่สุด			
เดือนมกราคมมี 30 วัน			
ช่วยด้วยครับ			
จงหาเซตคำตอบของสมการ $x + 2 = 0$			
π เป็นจำนวนตรรกยะ			
$x - 2 = 10$			
ลุงพลเป็นคนน่ารัก			
ดวงอาทิตย์ขึ้นทางทิศตะวันออก			
ครูป๊อบหล่อกว่าลุงพล			
ลุงพลและป้าแต๋นมิได้เป็นผู้มีมลทิน			

2. การเชื่อมประพจน์ (Connective)

ประโยคบางประโยคเกิดจากประโยคย่อยๆ แต่ละประโยคจะมี **"ตัวเชื่อม"** ซึ่งตัวเชื่อมพื้นฐานของประพจน์มี 4 ตัว ได้แก่ ตัวเชื่อม

และ	ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย	$\wedge$
หรือ	ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย	$\vee$
ถ้า ... แล้ว	ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย	$\rightarrow$
ก็ต่อเมื่อ	ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย	$\leftrightarrow$

บทนิยาม ประพจน์ย่อย และ ประพจน์เชิงประกอบ

(1) เรียกประพจน์ที่นำมาเชื่อมด้วยตัวเชื่อมต่างๆว่า ประพจน์ย่อย (atomic proposition)

(2) เรียกประพจน์ที่เกิดจากการเชื่อมของประพจน์ย่อยว่า ประพจน์เชิงประกอบ (compound proposition)

ในหัวข้อนี้เราสนใจศึกษาว่า ประพจน์สองประพจน์เมื่อนำมาเชื่อมด้วยตัวเชื่อม จะได้ประพจน์ใหม่ที่มีค่าความจริงเป็นเช่นไร ซึ่งก็ขึ้นอยู่กับค่าความจริงของประพจน์เดิมและตัวเชื่อมด้วย

2.1 ค่าความจริงของประพจน์ที่เกิดจากการเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อมต่างๆ

กำหนดให้ p และ q แทนประพจน์ใด ๆ

ให้ T แทนค่าความจริงของประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น**จริง**

F แทนค่าความจริงของประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น**เท็จ**

ตารางแสดงค่าความจริงของการเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อมต่างๆ

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

หมายเหตุ : ข้อสังเกตจากตาราง

1. $p \wedge q$ จะมีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อ p และ q มีค่าความจริงเป็นจริงทั้งคู่
   $p \wedge q$ จะมีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อ p หรือ q มีค่าความจริงเป็นเท็จอย่างน้อยหนึ่งประพจน์
2. $p \vee q$ จะมีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อ p และ q มีค่าความจริงเป็นเท็จทั้งคู่
   $p \vee q$ จะมีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อ p หรือ q มีค่าความจริงเป็นจริงอย่างน้อยหนึ่งประพจน์
3. $p \rightarrow q$ จะมีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อ p มีค่าความจริงเป็นจริง และ q มีค่าความจริงเป็นเท็จ
   $p \rightarrow q$ จะมีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อ p มีค่าความจริงเป็นเท็จ
   $p \rightarrow q$ จะมีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อ q มีค่าความจริงเป็นจริง
4. $p \leftrightarrow q$ จะมีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อ p และ q มีค่าความจริงเหมือนกัน
   $p \leftrightarrow q$ จะมีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อ p และ q มีค่าความจริงต่างกัน

2.2 นิเสธของประพจน์

การสร้างประพจน์ใหม่จากประพจน์ที่กำหนดให้ นอกจากจะใช้วิธีการเชื่อมประพจน์ดังที่ได้กล่าวไปแล้ว เรายังสามารถสร้างประพจน์ใหม่ได้อีกแบบหนึ่งคือ ใช้การเติมข้อความ **“ไม่เป็นความจริงที่ว่า”** ลงหน้าประพจน์เดิม เรียกประพจน์ใหม่ที่ได้นี้ว่า นิเสธของประพจน์เดิม ดังมีนิยามดังนี้

บทนิยาม ถ้า p เป็นประพจน์ใด ๆ **นิเสธ**ของประพจน์ p เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sim p$
นิเสธของประพจน์ หมายถึง ประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงข้ามกับประพจน์เดิม

ตารางแสดงค่าความจริงของการนิเสธประพจน์

p	~p
T	F
F	T

3. ประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ

3.1 ประโยคเปิด (Open Sentence)

บทนิยาม	**ประโยคเปิด** หมายถึง ประโยคบอกเล่าหรือประโยคปฏิเสธที่มีตัวแปร และเมื่อแทนค่าตัวแปรในประโยคเปิดด้วยสมาชิกใดๆ ในเอกภพสัมพัทธ์ จะเป็นประพจน์

สัญลักษณ์ ประโยคเปิดที่มีตัวแปร x จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ P(x) หรือ Q(x) เป็นต้น

<u>**ตัวอย่างที่ 2**</u> ประโยคในข้อใดต่อไปนี้เป็น ประพจน์ หรือ ประโยคเปิด หรือไม่ใช่ทั้งสอง

(1) เธอกำลังเรียนอยู่ในมหาวิทยาลัย

(2) เขาเป็นนักเรียนที่ตั้งใจเรียนมากใช่หรือไม่

(3) ถ้า 2 เป็นจำนวนเฉพาะแล้ว 2 เป็นจำนวนคี่

(4) $x \geq 0$ และ x เป็นจำนวนนับ

(5) x เป็นจำนวนเต็ม หรือ x เป็นจำนวนอตรรกยะ

(6) ถ้า x เป็นจำนวนเต็มแล้ว $\sqrt{x}$ เป็นจำนวนจริง

(7) $x^2 - 9$

(8) $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$

(9) ถ้า x เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $\sqrt{x}$ เป็นจำนวนจริงหรือไม่

(10) $(x + 5)(x - 1) = x^2 + 4x - 5$

3.2 ตัวบ่งปริมาณ (Quantifier)

ในวิชาคณิตศาสตร์ เรามักพบประโยคเปิด ที่มีลักษณะเป็นข้อความ เช่น

"**สำหรับ** (ตัวแปร) **ทุกตัว** (ประโยคเปิด)"

สำหรับ (ตัวแปร) **บางตัว** (ประโยคเปิด)"

เช่น สำหรับ x ทุกตัวที่เป็นจำนวนจริงบวก $\sqrt{x}$ หาค่าได้

สำหรับ x บางตัวที่เป็นจำนวนเต็มบวก $x^2 - 2x - 8 = 0$ เป็นต้น

บทนิยาม เรียกข้อความ

"สำหรับ ..... ทุกตัว" และ **"สำหรับ ..... บางตัว"** ว่าเป็น **ตัวบ่งปริมาณ** โดยที่

(1) ข้อความ "สำหรับ .... ทุกตัว" แสดงให้เห็นว่าเรากำลังกล่าวถึงสมาชิกทุกตัวใน U และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\forall$

(2) ข้อความ"สำหรับ .... บางตัว" แสดงให้เห็นว่าเรากำลังกล่าวถึงสมาชิกบางตัวใน U **และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์** $\exists$

จากนิยามการเขียนตัวบ่งปริมาณ ที่มีตัวแปร 1 ตัว และตัวแปร 2 ตัวในประโยคเปิดมีดังนี้

ข้อความตัวบ่งปริมาณ	สัญลักษณ์
แบบที่ 1 : "สำหรับ x ทุกตัว"	$\forall x$
แบบที่ 2 : "สำหรับ x บางตัว" หรือ "มี x บางตัว"	$\exists x$
แบบที่ 3 : "สำหรับ x ทุกตัว y ทุกตัว"	$\forall x \forall y$
แบบที่ 4 : "สำหรับ x บางตัว y บางตัว"	$\exists x \exists y$
แบบที่ 5 : "สำหรับ x บางตัว สำหรับ y ทุกตัว" หรือ "มี x บางตัว สำหรับ y ทุกตัว"	$\exists x \forall y$
แบบที่ 6 : "สำหรับ x ทุกตัว สำหรับ y บางตัว" หรือ "สำหรับ x ทุกตัว มี y บางตัว"	$\forall x \exists y$

หมายเหตุ

1. ตัวบ่งปริมาณ จะมีความหมายก็ต่อเมื่อกำหนดเอกภพสัมพัทธ์มาด้วย ดังนั้นการเขียนประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ จะต้องเขียนเอกภพสัมพัทธ์กำกับไว้เสมอ จึงจะสมบูรณ์ เพราะจะได้ทราบว่า สมาชิกทุกตัวหรือสมาชิกบางตัวที่กำลังกล่าวถึงเป็นสมาชิกของเซตใด
2. ถ้าเป็นประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณที่เกี่ยวข้องกับเรื่องของจำนวน และไม่ได้กำหนดเอกภพสัมพัทธ์มาให้ถือว่าเอกภพสัมพัทธ์คือ **เซตของจำนวนจริง**
3. ตัวบ่งปริมาณ จะใช้เขียนนำหน้าประโยคเปิด

ตัวอย่างที่ 3 ถ้าให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง จงเขียนประโยคต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์

(1) สำหรับ x ทุกตัว $x + x = x^2$

(2) สำหรับ x บางตัว $x^3 > 0$

(3) สำหรับ x ทุกตัว ถ้า $x \neq 0$ แล้ว $x^2 > 0$

(4) สำหรับ x บางตัว x เป็นจำนวนคู่ หรือ x เป็นจำนวนคี่

(5) สำหรับ x ทุกตัว $x > 0$ ก็ต่อเมื่อ $x^3 > 0$

(6) มี x บางตัว $x^2 = 2$ แล้ว x เป็นจำนวนอตรรกยะ

(7) มี x บางตัว x เป็นจำนวนเฉพาะ และ x เป็นจำนวนคู่

(8) สำหรับ x ทุกตัว y ทุกตัว $x + y = y + x$

(9) สำหรับ x และ y แต่ละจำนวน $x + y = xy$

(10) สำหรับ x บางตัว y บางตัว $x + y = 0$

4. ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ

4.1 ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ 1 ตัว

ให้ P(x) แทนประโยคเปิดที่มี x เป็นตัวแปร และ U แทนเอกภพสัมพัทธ์

1. $\forall$x[P(x)] มีค่าความจริงเป็น **จริง**
   ก็ต่อเมื่อ นำสมาชิก**ทุกตัว**ใน U ไปแทนค่า x ใน P(x) แล้ว ทำให้ P(x) เป็นจริง
   $\forall$x[P(x)] มีค่าความจริงเป็น **เท็จ**
   ก็ต่อเมื่อ มีสมาชิก**อย่างน้อยหนึ่งตัว**ใน U ไปแทนค่า x ใน P(x) แล้ว ทำให้ P(x) เป็นเท็จ

2. $\exists$x[P(x)] มีค่าความจริงเป็น **จริง**
   ก็ต่อเมื่อ มีสมาชิก**อย่างน้อยหนึ่งตัว**ใน U ไปแทนค่า x ใน P(x) แล้ว ทำให้ P(x) เป็นจริง
   $\exists$x[P(x)] มีค่าความจริงเป็น **เท็จ**
   ก็ต่อเมื่อ นำสมาชิก**ทุกตัว**ใน U ไปแทนค่า x ใน P(x) แล้ว ทำให้ P(x) เป็นเท็จ

ข้อสังเกต

1. ถ้า $\forall$x[P(x)] มีค่าความจริงเป็นจริง แล้ว $\exists$x[P(x)] มีค่าความจริงเป็นจริง
2. ถ้า $\forall$x[P(x)] มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้ว เราไม่สามารถสรุปเกี่ยวกับค่าความจริงของ $\exists$x[P(x)] ได้
3. ถ้า $\exists$x[P(x)] มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้ว $\forall$x[P(x)] มีค่าความจริงเป็นเท็จ
4. ถ้า $\exists$x[P(x)] มีค่าความจริงเป็นจริง แล้ว เราไม่สามารถสรุปเกี่ยวกับค่าความจริงของ $\forall$x[P(x)] ได้

<u>**ตัวอย่างที่ 4**</u> จงหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณต่อไปนี้

ประพจน์	เอกภพสัมพัทธ์ U	ค่า x ใน U ที่ทำให้ P(x) เป็นจริง	ค่า x ใน U ที่ทำให้ P(x) เป็นเท็จ	ค่าความจริงของประพจน์
$\forall$x[x ≥ 0]	{−2, −1, 0, 1, 2}			
$\forall$x[x +1 > x]	{−1, 0, 1}			
$\forall$x[x + 1 ≥ x]	$\mathbb{R}$			
$\forall$x[$\sqrt{x^2} = x$]	$\mathbb{R}$			
$\forall$x[$2x^2 + 3x + 1 = 0$]	$\mathbb{I}^-$			

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้ $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

ประพจน์	เอกภพสัมพัทธ์ U	ค่า x ใน U ที่ทำให้ P(x) เป็นจริง	ค่า x ใน U ที่ทำให้ P(x) เป็นเท็จ	ค่าความจริงของประพจน์
$\exists x[x \geq 0]$	$\{-2, -1, 0, 1, 2\}$			
$\exists x[x+1 > x]$	$\{-1, 0, 1\}$			
$\exists x[x+1 \geq x]$	$\mathbb{R}$			
$\exists x[\sqrt{x^2} = x]$	$\mathbb{R}$			
$\exists x[2x^2 + 3x + 1 = 0]$	$\mathbb{I}^-$			

(1) $\exists x[-\sqrt{x+6} = x]$

(2) $\exists x[x^2 = 2x]$

(3) $\forall x[\frac{x^2-4}{x+2} = x-2]$

(4) $\forall x[x^3 + 6 \geq x]$

(5) $\forall x[x < 0 \rightarrow -x > 0]$

(6) $\exists x[x^2 - 1 = 0 \rightarrow x < 0]$

4.2 ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ 2 ตัว

ให้ P(x,y) แทนประโยคเปิดที่มี x และ y เป็นตัวแปร และ U แทนเอกภพสัมพัทธ์

1. $\forall x \forall y[P(x,y)]$ มีค่าความจริงเป็น **จริง**
   ก็ต่อเมื่อ ค่าของ x และ y ใน U **ทุกๆคู่** ทำให้ P(x,y) เป็นจริง
   $\forall x \forall y[P(x,y)]$ มีค่าความจริงเป็น **เท็จ**
   ก็ต่อเมื่อ มีค่าของ x และ y ใน U **อย่างน้อยหนึ่งคู่** ทำให้ P(x,y) เป็นเท็จ
2. $\exists x \exists y[P(x,y)]$ มีค่าความจริงเป็น **จริง**
   ก็ต่อเมื่อ มีค่าของ x และ y ใน U **อย่างน้อยหนึ่งคู่** ทำให้ P(x,y) เป็นจริง
   $\exists x \exists y[P(x,y)]$ มีค่าความจริงเป็น **เท็จ**
   ก็ต่อเมื่อ ค่าของ x และ y ใน U **ทุกๆคู่** ทำให้ P(x,y) เป็นเท็จ
3. $\forall x \exists y[P(x,y)]$ มีค่าความจริงเป็น **จริง**
   ก็ต่อเมื่อ เมื่อแต่ละค่าของ x ใน U จะต้องมี y อย่างน้อยหนึ่งตัวใน U ที่ทำให้ P(x,y) เป็นจริง
   $\forall x \exists y[P(x,y)]$ มีค่าความจริงเป็น **เท็จ**
   ก็ต่อเมื่อ มี x ใน U อย่างน้อยหนึ่งค่า ที่ไม่สามารถหาค่า y ใน U ที่ทำให้ P(x,y) เป็นจริงได้เลย
4. $\exists x \forall y[P(x,y)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง
   ก็ต่อเมื่อ มี x ใน U อย่างน้อยหนึ่งค่า ที่ทำให้ P(x,y) เป็นจริง ทุกๆค่า y ใน U
   $\exists x \forall y[P(x,y)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง
   ก็ต่อเมื่อ ไม่มี x ใน U แม้แต่ตัวเดียว ที่ทำให้ P(x,y) เป็นจริง ทุกๆค่า y ใน U

สรุป เพื่อให้เห็นภาพพจน์ของประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงทั้ง 4 แบบ ให้นักเรียนพิจารณาโครงสร้างดังนี้
ถ้า U = {a, b, c} และ P(x, y) คือประโยคเปิด

	คู่ที่	x	y	P(x, y)
ชุดที่ 1	1	a	a	P(a, a)
	2		b	P(a, b)
	3		c	P(a, c)
ชุดที่ 2	4	b	a	P(b, a)
	5		b	P(b, b)
	6		c	P(b, c)
ชุดที่ 3	7	c	a	P(c, a)
	8		b	P(c, b)
	9		c	P(c, c)

***** การตรวจสอบประพจน์ *****

1. $\forall x \forall y[P(x,y)]$ เป็นจริง เมื่อทั้ง 9 คู่ทำให้ P(x, y) เป็นจริง
2. $\exists x \exists y[P(x,y)]$ เป็นจริง เมื่อทั้ง 9 คู่ มีอย่างน้อยหนึ่งคู่ ทำให้ P(x, y) เป็นจริง
3. $\forall x \exists y[P(x,y)]$ เป็นจริง เมื่อทั้งสามชุด แต่ละชุดมีอย่างน้อยหนึ่งคู่ ทำให้ P(x, y) เป็นจริง
4. $\exists x \forall y[P(x,y)]$ เป็นจริง เมื่อมีอย่างน้อยหนึ่งชุดที่ทุกคู่ในชุดนั้น ทำให้ P(x, y) เป็นจริง

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> กำหนดให้ $U = \{-1, 0, 1\}$

จะได้จำนวนกรณีที่ต้องพิจารณาทั้งหมด 9 กรณีดังนี้

	คู่ที่	x	y	P(x, y)
ชุด A	1	-1	-1	$P(-1, -1)$
	2		0	$P(-1, 0)$
	3		1	$P(-1, 1)$
ชุด B	4	0	-1	$P(0, -1)$
	5		0	$P(0, 0)$
	6		1	$P(0, 1)$
ชุด C	7	1	-1	$P(1, -1)$
	8		0	$P(1, 0)$
	9		1	$P(1, 1)$

จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

ประพจน์	คู่ x และ y ที่ทำให้ P(x,y) เป็นจริง	คู่ x และ y ที่ทำให้ P(x,y) เป็นเท็จ	ค่าความจริงของประพจน์
$\forall x \forall y[\,x^2 + y^2 \le 1\,]$			
$\exists x \exists y[\,x + y = xy\,]$			
$\forall x \exists y[\,\lvert x \rvert = y\,]$			
$\exists x \forall y[\,\lvert x + y \rvert = x + y\,]$			
$\forall x \forall y[\,x + y < xy]$			
$\exists x \exists y[\,x + y^2 > 2]$			
$\forall x \exists y[x^2 - y \ne y^2 - x]$			
$\exists x \forall y[xy = y]$			

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้ เมื่อกำหนดเอกภพสัมพัทธ์ในแต่ละข้อ

(1) $\forall x \forall y[x + y^2 > 7]$; $U = \{3, 4, 5\}$

(2) $\forall x \forall y[x + y < xy]$; $U = \{0, 1, 2\}$

(3) $\forall x \forall y[(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2]$; U = $\mathbb{R}$

(4) $\exists x \exists y[\frac{x}{y} \in \mathbb{I}]$; U = {−2, −5, 6, 9}

(5) $\exists x \exists y[x + y \le y]$; U = {1, 2, 3, ...}

(6) $\forall x \exists y[(x+y)^2 = x^2 + y^2]$; U = {−1, 0, 1}

5. การสมมูลของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ

การสมมูลกันของประโยคเปิด

กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ U และกำหนดประโยคเปิด P(x) , Q(x) และ R(x) จะได้รูปแบบของประโยคเปิดที่สมมูลกัน จะมีรูปแบบที่เหมือนกับรูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน ดังตารางนี้

รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน	รูปแบบของประโยคเปิดที่สมมูลกัน
E 1. $\sim(\sim p) \equiv p$	E 1. $\sim(\sim P(x)) \equiv P(x)$
E 2. $p \wedge q \equiv q \wedge p$	E 2. $P(x) \wedge Q(x) \equiv Q(x) \wedge P(x)$
E 3. $p \vee q \equiv q \vee p$	E 3. $P(x) \vee Q(x) \equiv Q(x) \vee P(x)$
E 4. $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$	E 4. $P(x) \leftrightarrow Q(x) \equiv Q(x) \leftrightarrow P(x)$
E 5. $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	E 5. $[P(x) \wedge Q(x)] \wedge R(x) \equiv P(x) \wedge [Q(x) \wedge R(x)]$
E 6. $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	E 6. $[P(x) \vee Q(x)] \vee R(x) \equiv P(x) \vee [Q(x) \vee R(x)]$
E 7. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \equiv p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$	E 7. $[P(x) \leftrightarrow Q(x)] \leftrightarrow R(x) \equiv P(x) \leftrightarrow [Q(x) \leftrightarrow R(x)]$
E 8. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	E 8. $P(x) \wedge [Q(x) \vee R(x)] \equiv [P(x) \wedge Q(x)] \vee [P(x) \wedge R(x)]$
$(q \vee r) \wedge p \equiv (q \wedge p) \vee (r \wedge p)$	$[Q(x) \vee R(x)] \wedge P(x) \equiv [Q(x) \wedge P(x)] \vee [R(x) \wedge P(x)]$
E 9. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	E 9. $P(x) \vee [Q(x) \wedge R(x)] \equiv [P(x) \vee Q(x)] \wedge [P(x) \vee R(x)]$
$(q \wedge r) \vee p \equiv (q \vee p) \wedge (r \vee p)$	$[Q(x) \wedge R(x)] \vee P(x) \equiv [Q(x) \vee P(x)] \wedge [R(x) \vee P(x)]$
E 10. $p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$	E10. $P(x) \rightarrow [Q(x) \wedge R(x)] \equiv [P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge [P(x) \rightarrow R(x)]$
$p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$	$P(x) \rightarrow [Q(x) \vee R(x)] \equiv [P(x) \rightarrow Q(x)] \vee [P(x) \rightarrow R(x)]$
E 11. $(p \wedge q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$	E 11. $[P(x) \wedge Q(x)] \rightarrow R(x) \equiv [P(x) \rightarrow R(x)] \vee [Q(x) \rightarrow R(x)]$
$(p \vee q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$	$[P(x) \vee Q(x)] \rightarrow R(x) \equiv [P(x) \rightarrow R(x)] \wedge [Q(x) \rightarrow R(x)]$
E 12. $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$	E 12. $P(x) \rightarrow Q(x) \equiv \sim P(x) \vee Q(x)$
E 13. $p \leftrightarrow q \equiv \sim p \leftrightarrow \sim q$	$\equiv \sim Q(x) \rightarrow \sim P(x)$
$\equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	E 13. $P(x) \leftrightarrow Q(x) \equiv \sim P(x) \leftrightarrow \sim Q(x)$
E 14. $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$	$\equiv (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (Q(x) \rightarrow P(x))$
E 15. $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$	E 14. $\sim[P(x) \wedge Q(x)] \equiv \sim P(x) \vee \sim Q(x)$
E 16. $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$	E 15. $\sim[P(x) \vee Q(x)] \equiv \sim P(x) \wedge \sim Q(x)$
E 17. $\sim(p \leftrightarrow q) \equiv \sim p \leftrightarrow q$	E 16. $\sim[P(x) \rightarrow Q(x)] \equiv P(x) \wedge \sim Q(x)$
$\equiv p \leftrightarrow \sim q$	E 17. $\sim[P(x) \leftrightarrow Q(x)] \equiv \sim P(x) \leftrightarrow Q(x) \equiv P(x) \leftrightarrow \sim Q(x)$
E 18. $p \wedge p \equiv p$	E 18. $P(x) \wedge P(x) \equiv P(x)$
E 19. $p \vee p \equiv p$	E 19. $P(x) \vee P(x) \equiv P(x)$
E 20. $p \wedge T \equiv p$	E 20. $P(x) \wedge T \equiv P(x)$
E 21. $p \vee F \equiv p$	E 21. $P(x) \vee F \equiv P(x)$
E 22. $T \rightarrow p \equiv p$	E 22. $T \rightarrow P(x) \equiv P(x)$
E 23. $p \rightarrow F \equiv \sim p$	E 23. $P(x) \rightarrow F \equiv \sim P(x)$
E 24. $p \leftrightarrow T \equiv p$	E 24. $P(x) \leftrightarrow T \equiv P(x)$
E 25. $p \leftrightarrow F \equiv \sim p$	E 25. $P(x) \leftrightarrow F \equiv \sim P(x)$

การสมมูลกันของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ

รูปแบบของประโยคเปิดที่สมมูลกัน ถ้าเติมตัวบ่งปริมาณชนิดเดียวกันไว้ข้างหน้ารูปแบบของประโยคเปิดดังกล่าว จะได้ประพจน์ที่สมมูลกัน

ตัวอย่างเช่น

(1) ให้ P(x) และ Q(x) แทนประโยคเปิด

เราทราบว่า $P(x) \rightarrow Q(x) \equiv \sim P(x) \vee Q(x)$

จะได้ว่า $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)] \equiv \forall x[\sim P(x) \vee Q(x)]$

$\exists x[P(x) \rightarrow Q(x)] \equiv \exists x[\sim P(x) \vee Q(x)]$

(2) ให้ P(x, y) และ Q(x, y) แทนประโยคเปิด

เราทราบว่า $P(x, y) \rightarrow Q(x, y) \equiv \sim P(x, y) \vee Q(x, y)$

จะได้ว่า $\forall x \forall y[P(x, y) \rightarrow Q(x, y)] \equiv \forall x \forall y[\sim P(x, y) \vee Q(x, y)]$

$\exists x \forall y[P(x, y) \rightarrow Q(x, y)] \equiv \exists x \exists y[\sim P(x, y) \vee Q(x, y)]$

เป็นต้น

<u>ตัวอย่างที่ 8</u> กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ U และกำหนดประโยคเปิด P(x) , Q(x) และ R(x) ประโยคใดต่อไปนี้สมมูลกัน

(1) $\exists x[P(x) \wedge (Q(x) \vee R(x))]$ กับ $\exists x[(P(x) \wedge Q(x)) \vee (P(x) \wedge R(x))]$

(2) $\forall x[P(x) \rightarrow (Q(x) \vee R(x))]$ กับ $\forall x[(\sim Q(x) \wedge \sim R(x)) \rightarrow \sim P(x)]$

(3) $\exists x[(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \sim R(x)]$ กับ $\exists x[R(x) \rightarrow (\sim Q(x) \vee \sim P(x))]$

6. นิเสธของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ

นิเสธของประโยคเปิด

ประโยคเปิด Q(x) จะเรียกว่า เป็นนิเสธของประโยคเปิด P(x) ก็ต่อเมื่อ
ถ้าแทนค่า x ด้วยสมาชิกทุกตัวใน U แล้วทำให้ Q(x) เป็นนิเสธของประพจน์ P(x)
นั่นคือ สำหรับ x ทุกตัวใน U ทำให้ค่าความจริงของ Q(x) และ P(x) ต่างกัน

สัญลักษณ์ นิเสธของประโยคเปิด P(x) เขียนแทนด้วย $\sim$P(x)

***** สิ่งที่ควรจำ : คู่นิเสธในคณิตศาสตร์**

ความสัมพันธ์	=	>	<	$\in$	$\subset$	หารลงตัว
นิเสธของความสัมพันธ์	$\neq$	$\leq$	$\geq$	$\notin$	$\not\subset$	หารไม่ลงตัว

<u>**ตัวอย่างที่ 9**</u> จงหานิเสธของประโยคเปิดต่อไปนี้

ประโยคเปิด	นิเสธประโยคเปิด
$x < x + 1$	
$x = \|x\|$	
$x + y \neq 5$	
$x^2 + y^2 \geq 1$	
x หาร ด้วย y ลงตัว	
xy เป็นจำนวนเต็ม	
$\frac{x}{y}$ เป็นจำนวนตรรกยะ	
x + y ไม่เป็นจำนวนเต็ม	
$\{x\} \subset \{x, y\}$	
$\{x\} \in P(\{x, y\})$	
$x \notin \{1, 2, 3, 4\}$	

นิเสธของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ

1. นิเสธของ $\forall x[P(x)]$ คือ $\sim\forall x[P(x)]$
   แต่ $\sim\forall x[P(x)]$ มีความหมายเหมือนกับ $\exists x[\sim P(x)]$
   นั่นคือ $\sim\forall x[P(x)] \equiv \exists x[\sim P(x)]$

2. นิเสธของ $\exists x[P(x)]$ คือ $\sim\exists x[P(x)]$
   แต่ $\sim\exists x[P(x)]$ มีความหมายเหมือนกับ $\forall x[\sim P(x)]$
   นั่นคือ $\sim\exists x[P(x)] \equiv \forall x[\sim P(x)]$

3. นิเสธของ $\forall x\forall y[P(x, y)]$ คือ $\sim\forall x\forall y[P(x, y)]$
   แต่ $\sim\forall x\forall y[P(x, y)]$ มีความหมายเหมือนกับ $\exists x\exists y[\sim P(x, y)]$
   นั่นคือ $\sim\forall x\forall y[P(x, y)] \equiv \exists x\exists y[\sim P(x, y)]$

4. นิเสธของ $\exists x\exists y[P(x, y)]$ คือ $\sim\exists x\exists y[P(x, y)]$
   แต่ $\sim\exists x\exists y[P(x, y)]$ มีความหมายเหมือนกับ $\forall x\forall y[\sim P(x, y)]$
   นั่นคือ $\sim\exists x\exists y[P(x, y)] \equiv \forall x\forall y[\sim P(x, y)]$

5. นิเสธของ $\forall x\exists y[P(x, y)]$ คือ $\sim\forall x\exists y[P(x, y)]$
   แต่ $\sim\forall x\exists y[P(x, y)]$ มีความหมายเหมือนกับ $\exists x\forall y[\sim P(x, y)]$
   นั่นคือ $\sim\forall x\exists y[P(x, y)] \equiv \exists x\forall y[\sim P(x, y)]$

6. นิเสธของ $\exists x\forall y[P(x, y)]$ คือ $\sim\exists x\forall y[P(x, y)]$
   แต่ $\sim\exists x\forall y[P(x, y)]$ มีความหมายเหมือนกับ $\forall x\exists y[\sim P(x, y)]$
   นั่นคือ $\sim\exists x\forall y[P(x, y)] \equiv \forall x\exists y[\sim P(x, y)]$

ข้อสังเกต : จากตารางนักเรียนจะพบว่า
การหานิเสธของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ เพียงแต่เปลี่ยน $\forall$ เป็น $\exists$ และ เปลี่ยน $\exists$ เป็น $\forall$ จากนั้นใส่ $\sim$ หน้าประโยคเปิด เช่น
นิเสธของ $\forall x[P(x)]$ หาได้โดยเปลี่ยน $\forall x$ เป็น $\exists x$ แล้วใส่ $\sim$ หน้าประโยคเปิด $P(x)$
นิเสธของ $\exists x\forall y[P(x,y)]$ หาได้โดยเปลี่ยน $\exists x\forall y$ เป็น $\forall x\exists y$ แล้วใส่ $\sim$ หน้าประโยคเปิด $P(x, y)$

ตัวอย่างที่ 10 จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

ประพจน์	นิเสธประพจน์
(1) $\forall x[x + 4 \le 10]$	
(2) $\forall x[4x > 9]$	
(3) $\exists x[x +1 = 0]$	
(4) $\exists x$[x หารด้วย 5 ลงตัว]	
(5) $\forall x\exists y[x^2 + y^2 > 5]$	
(6) $\exists x\forall y[x < y + x]$	
(7) $\forall x\forall y[x^2 + 2xy + y^2 = x - y]$	
(8) $\exists x\exists y$[xy เป็นจำนวนคู่]	
(9) $\forall x[x < 1 \rightarrow x^2 > 1]$	
(10) $\exists x[x \le 1 \vee x^2 \ge 1]$	
(11) $\forall x[\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert \wedge \sqrt[3]{x^3} = x]$	
(12) $\exists x[x + x = x^2 \rightarrow x = 2]$	
(13) $\forall x[x^2 \ge 0] \wedge \forall x[\lvert x\rvert \ge 0]$	
(14) $\forall x[x \notin \mathbb{I}] \rightarrow \exists x[x \in \mathbb{R}]$	
(15) $\exists x[x \in \mathbb{Q}] \rightarrow \forall x[x + 1 \le x]$	
(16) $\exists x[x + 2 = 4] \vee \exists x[x - 2 \ne 0]$	
(17) $\forall x\forall y[x + y \in \mathbb{R} \rightarrow xy \in \mathbb{R}]$	
(18) $\exists x\exists y[xy < 0 \wedge x + y < 0]$	
(19) $\exists x\forall y[xy = y \leftrightarrow x + y = y]$	
(20) $\forall x\exists y[x + y \ne 0 \vee xy \ne 1]$	
(21) $\forall x\exists y[xy = 1] \wedge \exists x\forall y[xy = y]$	
(22) $\forall x\forall y[x + y \in \mathbb{R}] \rightarrow \exists x\exists y[xy \notin \mathbb{R}]$	

<u>ตัวอย่างที่ 11</u> จงหานิเสธของข้อความต่อไปนี้

(1) จำนวนจริงทุกจำนวนเป็นจำนวนตรรกยะ

(2) จำนวนนับทุกจำนวนเป็นจำนวนเต็ม

(3) จำนวนเต็มทุกจำนวนไม่เป็นจำนวนอตรรกยะ

(4) มีจำนวนจริงบางจำนวนเป็นจำนวนตรรกยะ

(5) มีจำนวนเต็มบางจำนนไม่เป็นจำนวนคู่

(6) จำนวนจริงทุกจำนวน เป็นจำนวนตรรกยะ หรือเป็นจำนนอตรรกยะ

(7) มีจำนวนเต็มบางจำนวนที่เป็นจำนวนคู่ และเป็นจำนวนคี่

(8) สำหรับ x ทุกตัว ถ้า x เป็นจำนวนคี่แล้ว x เป็นจำนวนเฉพาะ

(9) มีจำนวนจริงบางจำนวนที่เป็นจำนวนคี่ แต่ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

(10) มีนักเรียนในห้องนี้อย่างน้อยหนึ่งคน ที่สอบเข้ามหาวิทยาลัยได้

<u>ตัวอย่างที่ 11</u> จงตรวจสอบว่าประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณในแต่ละข้อต่อไปนี้ สมมูลกันหรือไม่

(1) $\exists x[P(x)] \rightarrow \exists x[Q(x)]$ กับ $\forall x[\sim P(x)] \vee \exists x[Q(x)]$

(2) $\sim\forall x[P(x) \rightarrow (Q(x) \rightarrow R(x))]$ กับ $\exists x[(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow R(x)]$

(3) $\exists x[x < 0 \rightarrow x^2 > 0]$ กับ $\sim\forall x[x < 0 \wedge x^2 \leq 0]$

(4) $\sim\exists x[x \notin \mathbb{I} \wedge x + 2 = 5]$ กับ $\forall x[x + 2 \neq 5 \vee x \in \mathbb{I}]$

โจทย์ฝึกประสบการณ์เพิ่มเติม

คำชี้แจง : จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด

1. จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้
   1. $\forall x[x^2 > 4]$ เมื่อ $U = \{-4, -3, 3, 4\}$
   2. $\forall x[x^2 - 2x - 3 = 0]$ เมื่อ $U = \{0, 1, 2, 3\}$
   3. $\exists x[(x^2 + 4)(x - 5) < 0]$ เมื่อ $U = \mathbb{I}^-$
   4. $\exists x\left[\dfrac{x^2 + x - 6}{x} < 0\right]$ เมื่อ $U = [2, \infty)$

2. กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์ $U = \{x \in \mathbb{I} \mid x \geq 0\}$ ข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็น**<u>เท็จ</u>**
   1. $\exists x[x^3 = 3^x]$
   2. $\forall x[|x| = x]$
   3. $\forall x[3^x + 1 > 2]$
   4. $\exists x\left[\dfrac{2}{x} > x\right]$

3. ให้ $U = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| \leq 2\}$ ข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง
   1. $\forall x[x^2 - 3 < 6]$
   2. $\forall x[1 < x + 2 < 5]$
   3. $\exists x[|x + 2| < 2 - x]$
   4. $\exists x[\sqrt{x} > 2]$

4. ให้ $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

   P(x) แทน x เป็นพหุคูณของ 3

   Q(x) แทน x เป็นจำนวนเฉพาะ

   R(x) แทน x หาร 36 ลงตัว

   ประพจน์ใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็น**<u>เท็จ</u>**
   1. $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$
   2. $\forall x[R(0) \rightarrow \sim P(x)]$
   3. $\exists x[Q(x) \rightarrow P(1)]$
   4. $\forall x[R(x) \rightarrow (P(0) \wedge Q(1))]$

5. ให้ $\mathbb{R}$ เป็นเซตของจำนวนจริง $\mathbb{Q}$ เป็นเซตของจำนวนตรรกยะ

   $\mathbb{I}$ เป็นเซตของจำนวนเต็ม และ $U = \mathbb{R}$

   ข้อความใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็น**<u>จริง</u>**
   1. $\exists x[x \notin \mathbb{Q} \wedge x > \sqrt{2}] \rightarrow \forall x[x^2 > 9 \rightarrow x > 3]$
   2. $\forall x[x \in \mathbb{I} \vee |x + 3| > 8]$
   3. $\{x \mid x \in \mathbb{Q}$ และ x มีตัวเศษเป็น 0$\}$ เป็นเซตอนันต์ $\leftrightarrow \exists x[x^2 \leq x \vee x^2 + x + 1 = 0]$
   4. $\exists x[x^3 + 5x - 1 < 4] \wedge \forall x[|x^2 - 1| < 0 \rightarrow x \geq -2]$

6. จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

(1) $\forall x[x^2 > 4]$

(2) $\exists x[x^2 + 1 \neq x + 7]$

(3) $\forall x \forall y[x^2 + y^2 = 5]$

(4) $\forall x \exists y[x + y < 4]$

(5) $\exists x \forall y[x - y = 7]$

(6) $\exists x \exists y[2x - y > 8]$

7. นิเสธของข้อความ $\exists x[P(x) \vee \sim Q(x)]$ คือข้อใด

1. $\sim \forall x[\sim P(x) \rightarrow Q(x)]$
2. $\forall x[P(x) \wedge \sim Q(x)]$
3. $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$
4. $\forall x[\sim(\sim P(x) \rightarrow \sim Q(x))]$

8. กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง และ p แทนประพจน์

"สำหรับจำนวนจริงบวก x ใด ๆ ผลบวกของ x กับ $\frac{1}{x}$ มีค่ามากกว่า 1"

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. p สมมูลกับ $\forall x\left[x \leq 0 \vee \left(x + \frac{1}{x} > 1\right)\right]$

ข. p มีค่าความจริงเป็นจริง

ข้อใดต่อไปนี้<u>ถูก</u>

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ผิด และ ข. ถูก
3. ก. ถูก และ ข. ผิด
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

9. นิเสธของข้อความ $\exists x \forall y[xy < 0 \rightarrow (x < 0 \vee y < 0)]$ คือข้อความในข้อใดต่อไปนี้

1. $\forall x \exists y[(xy \geq 0 \vee (x < 0 \vee y < 0)]$
2. $\exists x \forall y[xy < 0 \wedge (x \geq 0 \wedge y \geq 0)]$
3. $\exists x \forall y[(xy \geq 0) \vee (x < 0 \vee y < 0)]$
4. $\forall x \exists y[(xy < 0) \wedge (x \geq 0 \wedge y \geq 0)]$

10. นิเสธของข้อความ $\forall x \exists y[(xy = 0 \wedge x \neq 0) \rightarrow y = 0]$ สมมูลกับข้อความในข้อใดต่อไปนี้

1. $\exists x \forall y[(xy = 0 \vee x = 0) \wedge y \neq 0]$
2. $\exists x \forall y[(xy \neq 0 \wedge x = 0) \vee y = 0]$
3. $\exists x \forall y[(xy = 0 \wedge x \neq 0) \wedge y \neq 0]$
4. $\exists x \forall y[(xy \neq 0 \vee x = 0) \vee y = 0]$