

Chapter 1 Geometric transformation

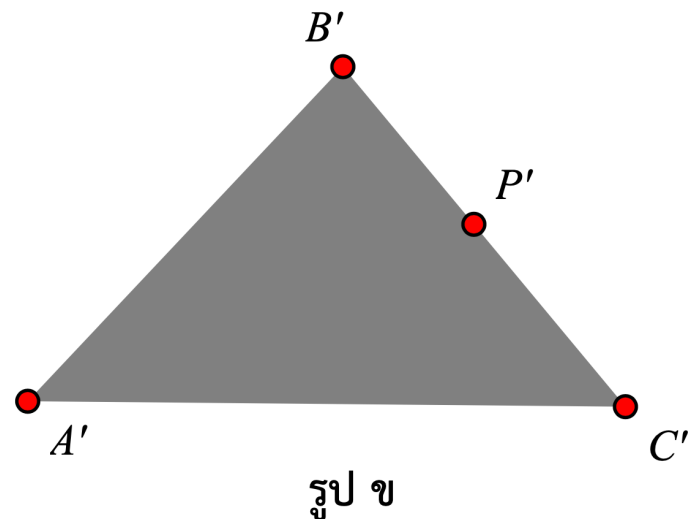
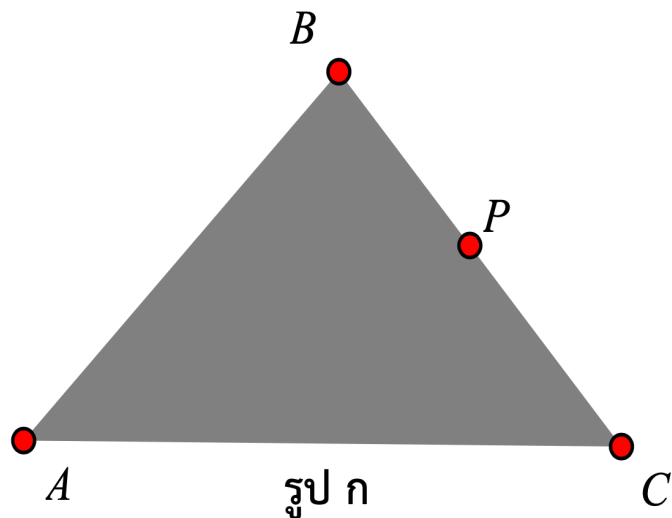
บทที่ 1 การแปลงทางเรขาคณิต

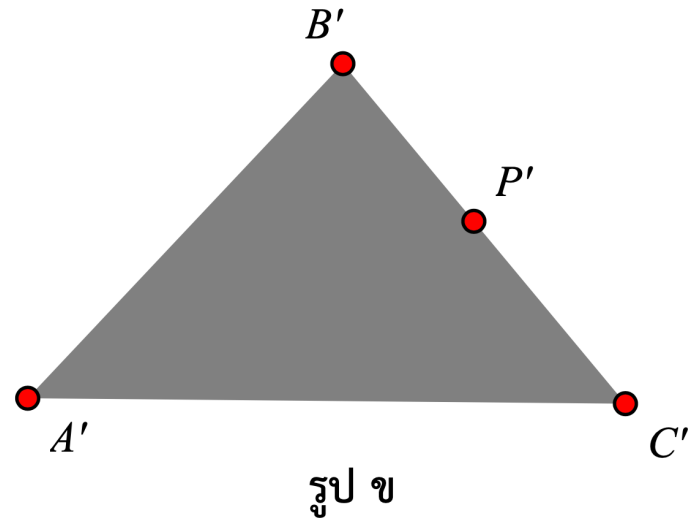
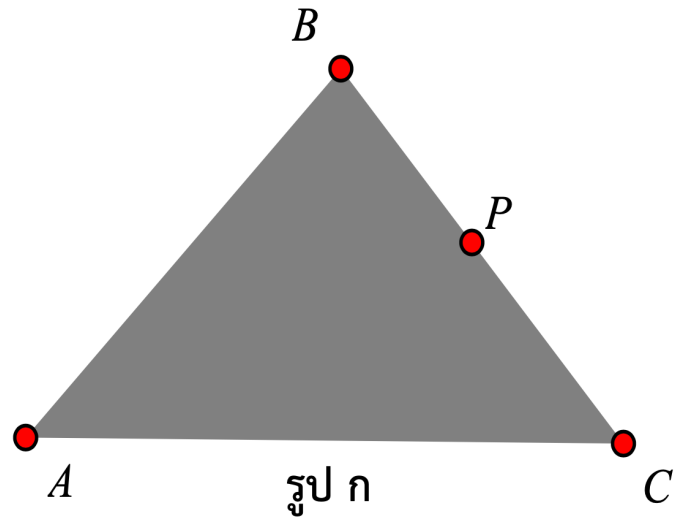
การแปลงทางเรขาคณิต

ในทางเรขาคณิตมีการกล่าวถึง ความเกี่ยวข้องกันระหว่างรูปเรขาคณิตก่อนการแปลงและรูปเรขาคณิตหลังการแปลง เราเรียกรูปเรขาคณิตก่อนการแปลงว่า **รูปต้นแบบ (pre-image)** เรียกรูปเรขาคณิตหลังการแปลงรูปต้นแบบว่า **ภาพที่ได้จากการแปลง (image)**

และเรียกชื่อการแปลงว่า **การแปลงทางเรขาคณิต (geometric transformation)** แต่ในบางครั้งจะเรียกสั้น ๆ ว่า การแปลง

กำหนดรูป ก เป็นรูปต้นแบบ และรูป ข เป็นภาพที่ได้จากการแปลงรูป ก



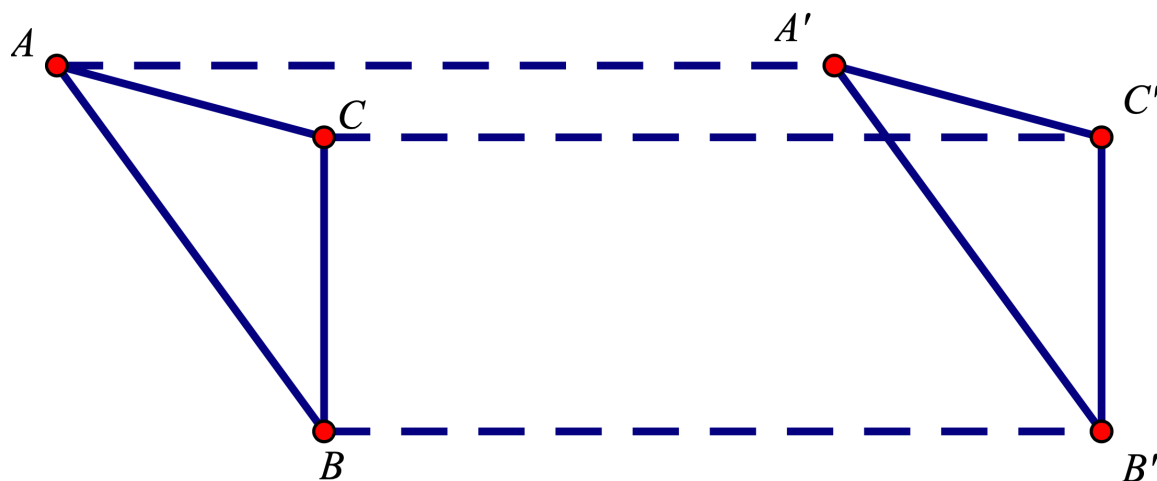


จากรูป ถ้าจุด P เป็นจุดจุดหนึ่งบนรูป ก
จุด P' เป็นภาพที่ได้จากการแปลงจุด p
และ เรากล่าวว่า P และจุด P' เป็น

Example 1

ให้นักเรียนพิจารณารูปต่อไปนี้

กำหนดให้ $\triangle A'B'C'$ เป็นภาพที่ได้จากการแปลง $\triangle ABC$



โดยมี จุด A กับ จุด
จุด B กับ จุด
และ จุด C กับ จุด

เป็นจุดที่สมนัยกัน
เป็นจุดที่สมนัยกัน
เป็นจุดที่สมนัยกัน

\overline{AB} กับ $\overline{A'B'}$ เป็น
 \overline{BC} กับ $\overline{B'C'}$ เป็น
และ \overline{CA} กับ เป็น

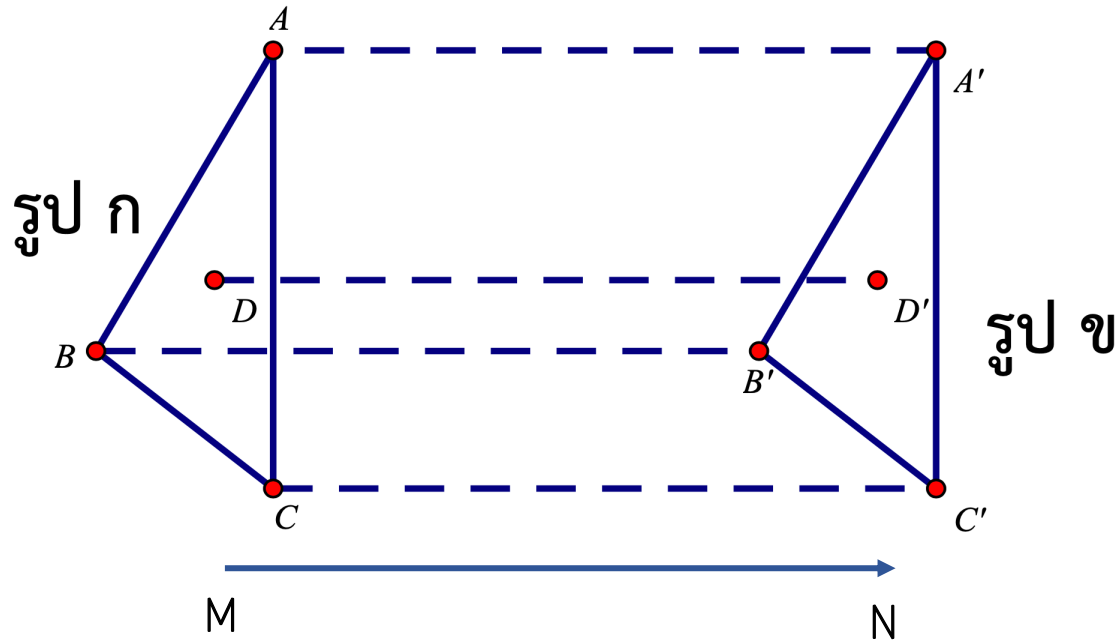
การแปลงทางเรขาคณิต

การแปลงทางเรขาคณิต ที่เป็นพื้นฐานมีทั้งหมด 4 แบบ ได้แก่

1. การเลื่อนขนาน (translation)
2. การสะท้อน (reflection)
3. การหมุน (rotation)
4. การย่อ/ขยาย (dilation)

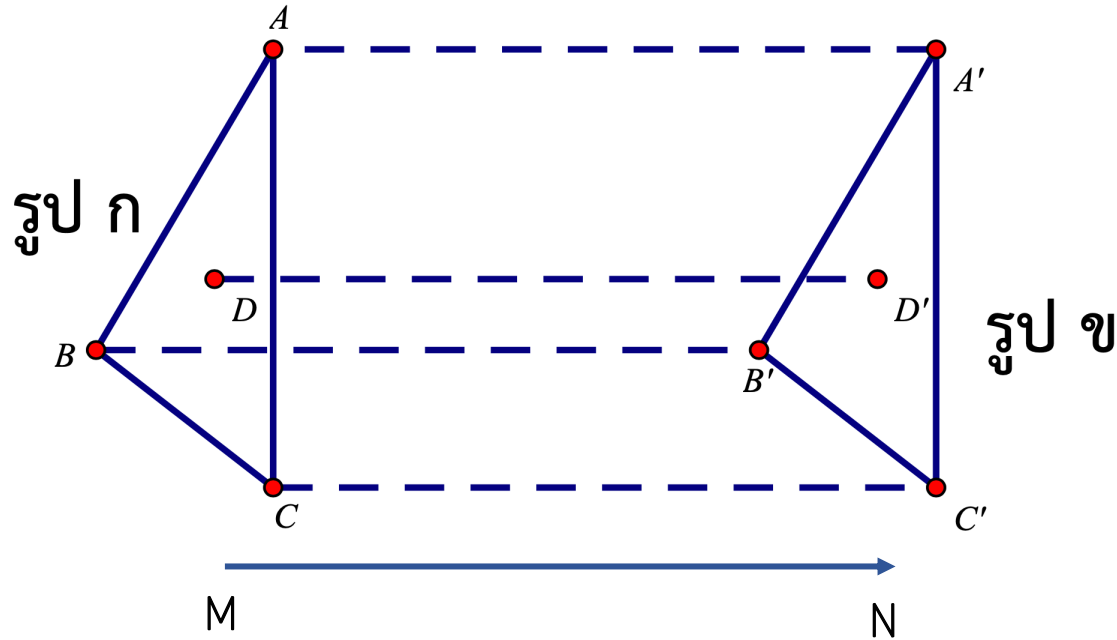
การเลื่อนขนาน (translation)

การเลื่อนขนานบนระนาบเป็นการแปลงทางเรขาคณิตที่มีการเลื่อนจุดทุกจุดไปบนระนาบตามแนวเส้นตรงในทิศทางเดียวกันและระยะทางเท่ากันตามที่กำหนด



เวกเตอร์ (vector) เป็นตัวกำหนดในการบอกทิศทางและระยะของการเลื่อนขนาน (การกำหนดเวกเตอร์ของการเลื่อนขนานอาจให้เริ่มต้นอยู่บนแบบหรืออยู่นอกต้นแบบก็ได้)

การเลื่อนขนาน (translation)

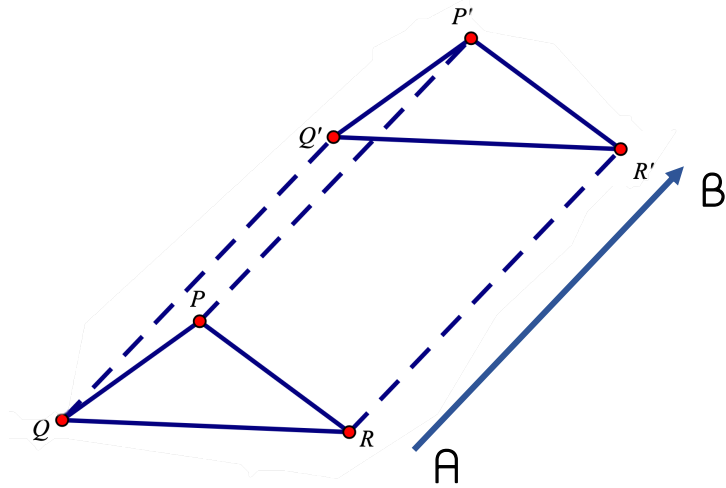


สมบัติของการเลื่อนขนาน

1. รูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานสามารถทับกันได้สนิทโดยไม่ต้องพลิกรูป หรือกล่าวว่ารูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานเท่ากันทุกประการ
2. ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดที่สมนัยกันแต่ละคู่ จะขนานกันและยาวเท่ากันทุกเส้น
3. ส่วนของเส้นตรงบนรูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานส่วนของเส้นนั้นจะขนานกันและยาวเท่ากัน

Example 2

เมื่อกำหนดให้ $\triangle PQR$ และให้ \vec{AB} เป็นเวกเตอร์ของการเลื่อนขนานจะได้ $\triangle P'Q'R'$ เป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน $\triangle PQR$ ดังรูป

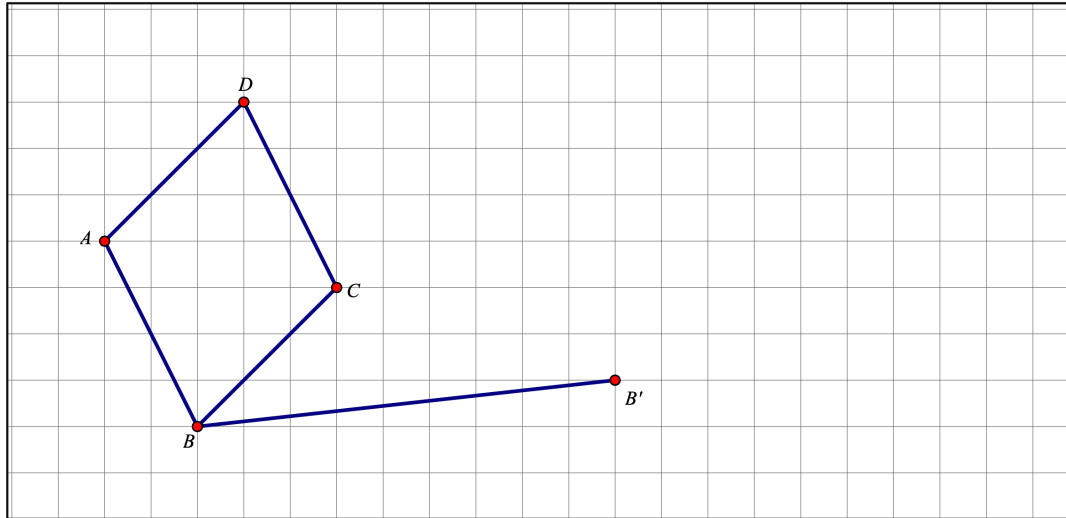


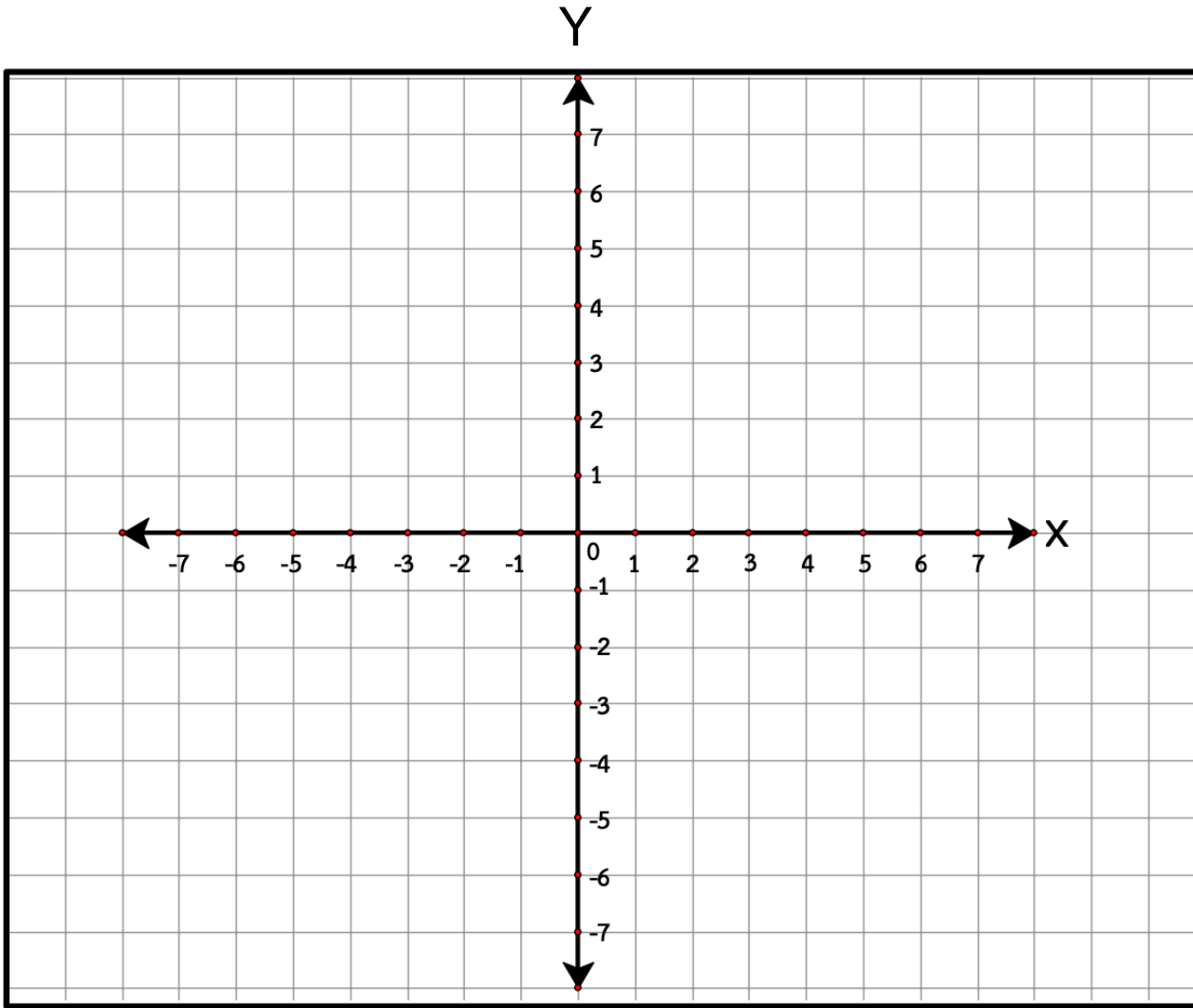
สมบัติของการเลื่อนขนาน

1. รูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานสามารถทับกันได้สนิทโดยไม่ต้องพลิกรูป หรือกล่าวว่ารูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานเท่ากันทุกประการ
2. ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดที่สมนัยกันแต่ละคู่ จะขนานกันและยาวเท่ากันทุกเส้น
3. ส่วนของเส้นตรงบนรูปต้นแบบและภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานส่วนของเส้นนั้นจะขนานกันและยาวเท่ากัน

Example 3

จงหาภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน $\square ABCD$ ด้วย $\overrightarrow{BB'}$





การเลื่อนขนานในระบบพิกัดฉาก

การเลื่อนขนานในระบบพิกัดฉาก จุดต่าง ๆ สามารถเขียนได้ (x, y) โดยที่ x คือ ระยะห่างจากแกน X และ y คือ ระยะห่างจากแกน Y ทำให้การขนานระบบพิกัดฉาก แบ่งออกเป็นสองส่วน คือ การเคลื่อนที่ในแนวนอน (แกน X) และการเคลื่อนที่ในแนวตั้ง (แกน Y)

ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดของจุดบนรูปต้นแบบ กับ พิกัดของจุดบนภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนานเป็นดังนี้

พิกัด x ของจุดบนภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนาน

พิกัด x ของจุดบนรูปต้นแบบ + ความยาวของเวกเตอร์ตามแนวแกน x (โดยคิดทิศทาง)

พิกัด y ของจุดบนภาพที่เกิดจากการเลื่อนขนาน

พิกัด y ของจุดบนรูปต้นแบบ + ความยาวของเวกเตอร์ตามแนวแกน y (โดยคิดทิศทาง)

การเลื่อนขนานในระบบพิกัดฉาก

การเลื่อนขนานบนระบบพิกัดฉาก สามารถเขียนลำดับการเลื่อนได้เป็น (a, b) หรือ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

โดย a หมายถึง การเลื่อนขนานในแนวนอน (ตามแกน X)

b หมายถึง การเลื่อนขนานในแนวตั้ง (ตามแกน Y)

กำหนดให้





จุด A คือ จุดบนรูปต้นแบบมีพิกัด (x, y)

จุด A' คือ ภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานจุด A บนระบบพิกัดฉาก มีพิกัดเป็น (x', y')





$$(x', y') = (x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$$

การเลื่อนขนานในระบบพิกัดฉาก

การเลื่อนขนานบนระบบพิกัดฉาก สามารถเขียนลำดับการเลื่อนได้เป็น (a, b) หรือ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

ทิศทาง	เครื่องหมาย
	+
	
	-
	

การเลื่อนขนานบนระบบพิกัดฉาก สามารถเขียนลำดับการเลื่อนได้เป็น (a, b) หรือ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

ทิศทาง	เครื่องหมาย
	+
	
	-
	

$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ หมายถึง

$\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ หมายถึง

$\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$ หมายถึง

$\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$ หมายถึง

แบบฝึกหัดที่ 4

- 1) $A(0, 0)$ เลื่อนขนานไปตามแกน X 3 หน่วย A' มีพิกัดเป็น
- 2) $B(0, 5)$ เลื่อนขนานไปตามแกน Y -2 หน่วย B' มีพิกัดเป็น
- 3) $C(5, 2)$ เลื่อนขนานไปทางขวา 4 หน่วย C' มีพิกัดเป็น
- 4) $D(-1, 3)$ เลื่อนขนานไปทางซ้าย 2 หน่วย D' มีพิกัดเป็น

5) E(9, 0) เลื่อนขนานไป $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ É มีพิกัดเป็น

6) F(7, 2) เลื่อนขนานไป $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ F̂ มีพิกัดเป็น

7) G(-4, -2) เลื่อนขนานไป $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ Ĝ มีพิกัดเป็น

8) H(4, -5) เลื่อนขนานไป $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ Ĥ มีพิกัดเป็น

9) I(-6, 0) เลื่อนขนานไป $\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$ Ĩ มีพิกัดเป็น

10) J(-3, 2) เลื่อนขนานไป $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ Ĵ มีพิกัดเป็น

2. ถ้าภายใต้การเลื่อนขนาน T ทำให้จุด $(3, 1)$ ไปปรากฏอยู่ที่ $(5, 4)$ จงหาว่าภายใต้การเลื่อนขนานเดียวกัน จุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้ปรากฏเป็นภาพที่ตำแหน่งใด

1) จุด $(2, 5)$

2) จุด $(0, 1)$

3) จุด $(-2, -3)$

4) จุด $(5, 0)$

5) จุด $(-2, 0)$

6) จุด $(0, -3)$

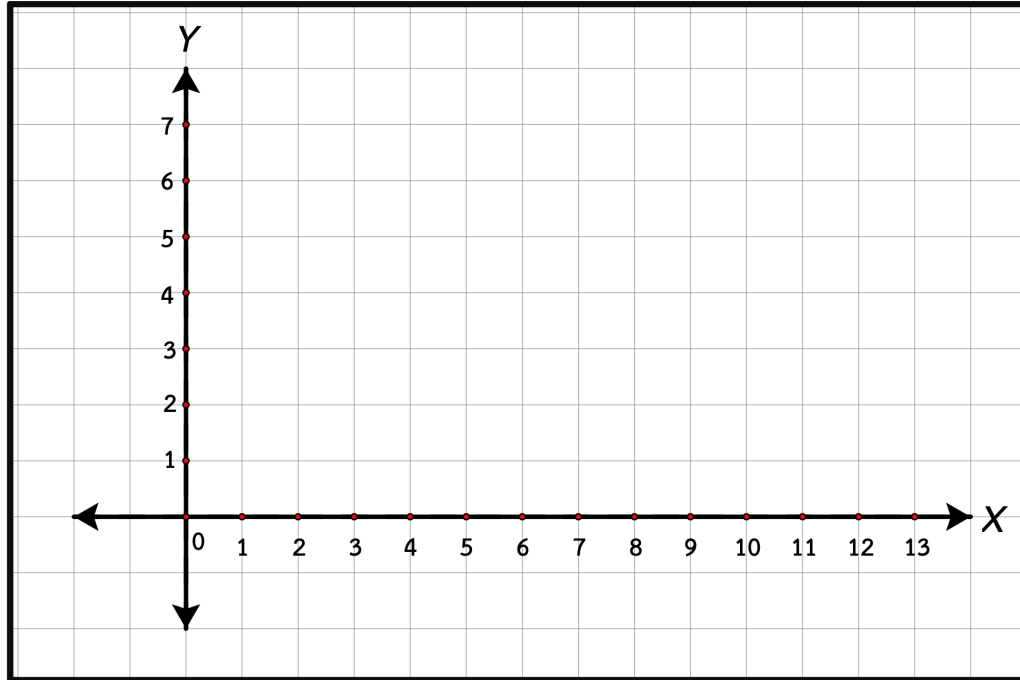
7) จุด $(5, -1)$

8) จุด $(-4, 2)$

9) จุด $(2, 5)$

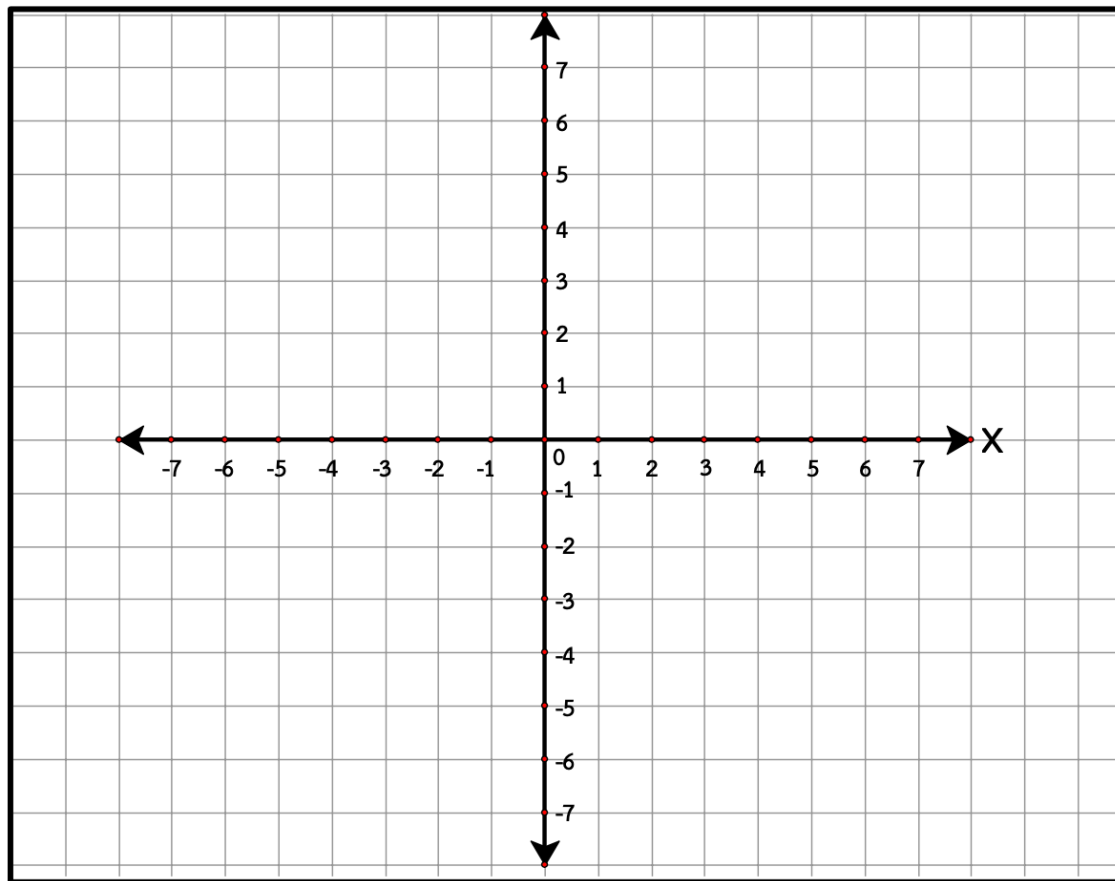
10) จุด $(-2, -2)$

3. จงเลื่อนขนานรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD ที่มีจุด A(2, 1), B(6, 1), C(7, 4) และ D(3, 4) ภายใต้การเลื่อน $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$



4. การเลื่อนขนานของจุด $(3, 7)$ ได้ภาพของการเลื่อนขนานที่จุด $(1, 3)$ จงหาพิกัดของจุด $(5, -1)$ ภายใต้การเลื่อนขนานแบบเดียวกัน

5. รูปสี่เหลี่ยม ABCD ที่มีจุด $A(-2, -1)$, $B(1, 1)$, $C(-2, 3)$ และ $D(-3, 1)$ ภายใต้การเลื่อน $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ แล้วถ้าให้เลื่อนไปอีกด้วยภายใต้การเลื่อน $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ รูปการเลื่อนขนานสุดท้ายอยู่ที่พิกัดเท่าไร

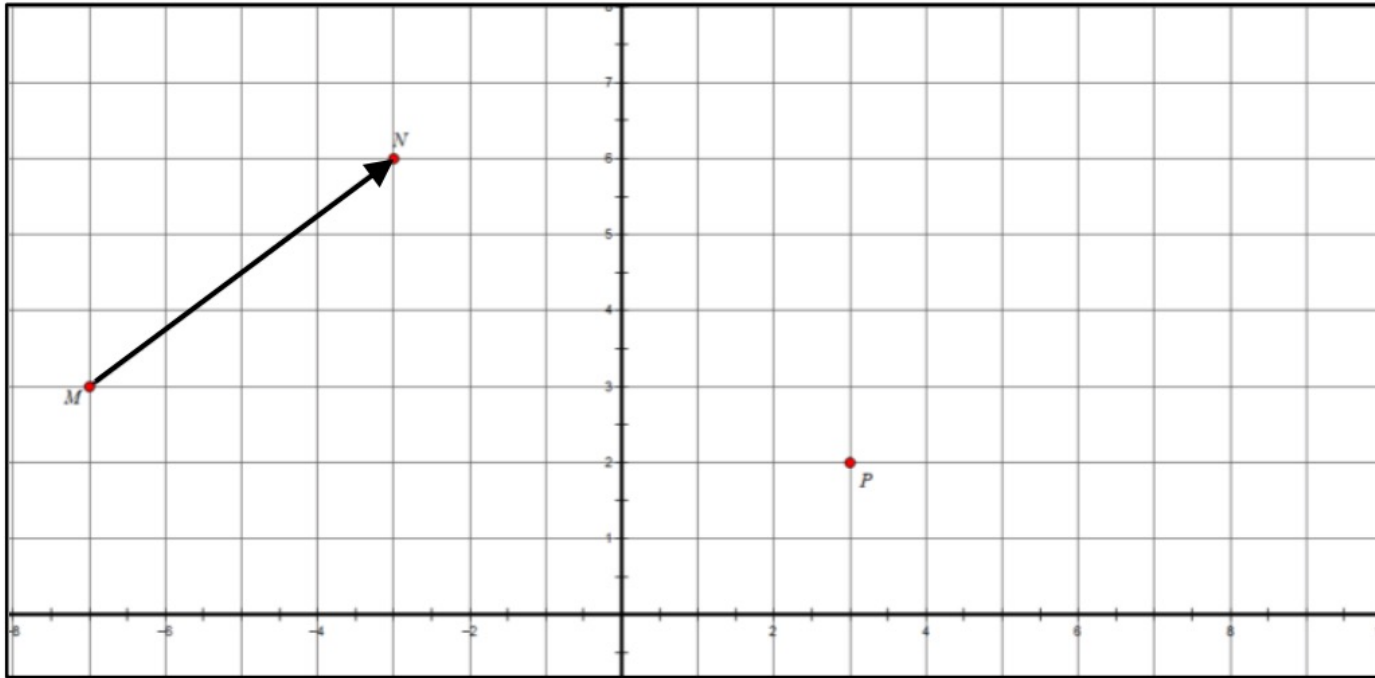


Example 4

ให้นักเรียนเลื่อนขนานจุด P ด้วย \overrightarrow{MN}

ให้จุด $A(-3, 2)$ และ จุด $B(1, 3)$ เป็นจุดปลายของ \overline{AB} และ \overrightarrow{MN} เป็นเวกเตอร์ของการเลื่อนขนาน

1. จงหาภาพที่ได้จากการเลื่อนขนาน \overline{AB} ด้วย \overrightarrow{MN}



2. พิกัดของจุด A' และ จุด B' ซึ่งเป็นภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานจุด A และ จุด B ด้วย \overrightarrow{MN}